

Jacques PICHON

Cours et conseils de travail;  
exercices et problèmes corrigés

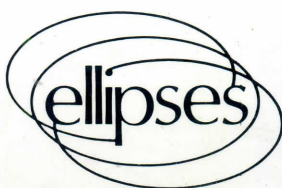
R

ET SES  
PRINCIPALES  
PROPRIÉTÉS

---

$\Pi_1$

---



M 242

Mathématiques supérieures et première année universitaire  
Cours et conseils de travail; exercices et problèmes corrigés

# Jacques PICHON

Agrégé de mathématiques  
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud  
Professeur en classe de Mathématiques Supérieures  
au Lycée Saint-Louis (Paris)

---

$\mathbb{R}_1$

---

$\mathbb{R}$

5232  $\frac{1}{4}$

## ET SES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS



Définition de  $\mathbb{R}$   
Fonctions continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$   
Topologie sur  $\mathbb{R}$   
Fonctions uniformément continues



EDITEUR DES PREPARATIONS  
GRANDES ECOLES - MEDECINE

---

# SOMMAIRE

<b>I - DÉFINITION DE <math>\mathbb{R}</math></b>	9 à 13
<b>1 - INTRODUCTION</b>	9
. Définition intuitive de $\mathbb{R}$	
. Les rationnels ne sont pas les seuls nombres réels : $\sqrt{2}$	
<b>2 - RÉSUMÉ SUR LA STRUCTURE DE <math>\mathbb{R}</math></b>	11
. Construction géométrique du produit $\mathbb{R}\mathbb{R}'$	
. $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné archimédien	
<b>II - PROPRIÉTÉS DE <math>\mathbb{R}</math></b>	15 à 27
<b>1 - ENSEMBLES DENSES DANS <math>\mathbb{R}</math></b>	15
. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$	
. $\mathbb{C}\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$	
. Etude des sous-groupes de $\mathbb{R}$	
<b>2 - THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE</b>	17
. Procédé de dichotomie	
. Les intervalles de $\mathbb{R}$	
<b>3 - THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS</b>	19
. Définitions d'un point d'accumulation	
<b>4 - QUELQUES PROPRIÉTÉS RELIÉES     AUX POINTS D'ACCUMULATION</b>	22
. Caractérisation d'un ensemble sans point d'accumulation	
. Ensembles et fonctions que l'on peut dessiner	
. Possibilité de numérotation dans l'ordre croissant des éléments d'une partie de $\mathbb{R}$	
<b>5 - ENSEMBLES ADJACENTS</b>	26
<b>6 - CONCLUSION</b>	27
. Tout corps commutatif, totalement ordonné, archimédien qui vérifie le théorème de la Borne supérieure est isomorphe à $\mathbb{R}$ .	
<b>7 - UNE DERNIÈRE EXTENSION DE <math>\mathbb{R}</math> : <math>\overline{\mathbb{R}}</math></b>	27
. $-\infty, +\infty$	
<b>8 - EN RÉSUMÉ</b>	27

<b>III - CONTINUITÉ</b>	29 à 50
<b>1 - DÉFINITION</b>	29
. Explication de la définition mathématique de la continuité	
. Possibilité d'imposer des conditions à $\epsilon$ et $\alpha$	
. Un moyen de concrétiser la définition de la continuité	
<b>2 - LE VOCABULAIRE DE LA NOTION DE PROXIMITÉ</b>	34
. Voisinage, voisinage pointé	
. Approximation à $\alpha$ près : $x = x_0 \pm \alpha$	
. Continuité à l'aide des voisinages	
<b>3 - OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES</b>	35
. Addition, division, composition, multiplication	
. Exemples de majorations	
. 3 lemmes sur les fonctions continues	
<b>4 - COMMENT DÉMONTRER LA CONTINUITÉ</b>	40
. Exemples de majorations	
<b>5 - LES FONCTIONS DISCONTINUES</b>	42
. Discontinuité de première espèce, de deuxième espèce	
<b>6 - FONCTIONS CONTINUES SUR UNE PARTIE A</b>	43
<b>7 - FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX</b>	43
<b>8 - PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES DE <math>\mathbb{R}</math> DANS <math>\mathbb{R}</math></b>	43
. Théorème des valeurs intermédiaires	
. 2 lemmes	
. Image d'un intervalle, d'un intervalle fermé borné	
. $f$ croissante sur $[a, b]$ : $f$ surjective sur $[f(a), f(b)] \iff f$ continue sur $[a, b]$	
. Continuité de la fonction réciproque	
<b>9 - DEUX EXEMPLES DE PROBLÈMES DE CONTINUITÉ</b>	48
. Fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$	
. Approximation d'un irrationnel par des rationnels : le dénominateur de la fraction doit tendre vers l'infini	
<b>10 - RÉSUMÉ</b>	50
<b>IV - TOPOLOGIE DE <math>\mathbb{R}</math></b>	51 à 65
<b>1 - INTRODUCTION</b>	51
. Qu'est-ce que la topologie	
<b>2 - NOTIONS TOPOLOGIQUES DANS <math>\mathbb{R}</math></b>	53
. Point isolé, adhérence, partie ouverte, partie fermée	
. Caractérisations des fermés	
. Utilisation des suites	
<b>3 - QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX</b>	57
. Intérieur, frontière	

<b>4 - UNE PETITE INCURSION DANS LA TOPOLOGIE GÉNÉRALE</b>	<b>59</b>
. $f$ continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert	
<b>5 - CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE SUR UNE PARTIE A QUELCONQUE</b>	<b>62</b>
. fonction définie sur une réunion d'intervalles	
<b>6 - FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX</b>	<b>65</b>
<b>7 - RÉSUMÉ</b>	<b>65</b>
<b>V - LIMITE D'UNE FONCTION</b>	<b>67 à 78</b>
<b>1 - INTRODUCTION</b>	<b>67</b>
. $a$ doit être un point adhérent à $A$	
<b>2 - LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT <math>a</math> ADHÉRENT À <math>A</math></b>	<b>67</b>
. Notation	
. Rappel de théorèmes	
<b>3 - UTILISATION DE L'INFINI</b>	<b>70</b>
<b>4 - MÉTHODES POUR LE CALCUL DES LIMITES</b>	<b>71</b>
. Utilisation de la quantité conjuguée	
. Mélange de fonctions rationnelles, exponentielles, logarithmes	
<b>5 - PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ</b>	<b>78</b>
<b>VI - CONTINUITÉ UNIFORME D'UNE FONCTION</b>	<b>79 à 85</b>
<b>1 - DÉFINITION</b>	<b>79</b>
. Place des quantificateurs	
. Exemples généraux	
<b>2 - COMMENT MONTRER QU'UNE FONCTION CONTINUE EST UNIFORMÉMENT CONTINUE</b>	<b>80</b>
. Théorème de Heine	
. Recollement des fonctions uniformément continues	
<b>VII - UNE DÉFINITION ENSEMBLISTE DE <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>87 à 95</b>
(Complément hors programme)	
<b>1 - INTRODUCTION</b>	<b>87</b>
. Idée de la construction	
<b>2 - COUPURE DANS <math>\mathbb{Q}</math></b>	<b>87</b>
. 4 types de coupures	
<b>3 - DÉFINITION DE <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>88</b>

<b>4 - DÉMONSTRATIONS</b>	90
<b>5 - REMARQUE</b> . On ne peut agrandir $\mathbb{R}$ par des coupures	93
<b>6 - THÉORÈME DE LA BORNE SUPÉRIEURE</b>	93
<b>7 - THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS</b>	95
<b>VIII - EXERCICES SUR <math>\mathbb{R}</math> (43 Énoncés)</b>	97 à 103
<b>IX - PROBLÈME ENSI CHIMIE</b> <b>  GROUPE CENTRE 1977</b>	105 à 106
<b>X - CORRIGÉS DES EXERCICES</b>	107 à 140
<b>XI - SOLUTION DU PROBLÈME ENSI CHIMIE 1977</b>	141 à 154
<b>INDEX DÉTAILLÉ</b>	155 à 160