

Jacques PICHON

Cours et conseils de travail  
Exercices et problèmes corrigés

THEORIE  
DES ENSEMBLES  
LOGIQUE  
LES ENTIERS



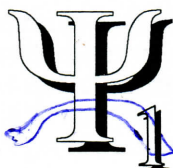
M 240

Mathématiques supérieures et première année universitaire  
Cours et conseils de travail; exercices et problèmes corrigés

Jacques PICHON

Agrégé de mathématiques  
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud  
Professeur en classe de Mathématiques Supérieures  
au Lycée Saint-Louis (Paris)

IMAZIGENE :



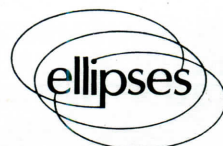
5248

1/4

THEORIE  
DES ENSEMBLES  
LOGIQUE  
LES ENTIERS



Bases du raisonnement mathématique  
Indices, familles indexées  
Relations d'ordre, d'équivalence  
Ensembles finis, infinis, dénombrables



# SOMMAIRE

## THEORIE DES ENSEMBLES

7

### I - LES ENSEMBLES: LANGAGE, NOTATIONS, OPERATIONS

7 à 19

- 1 - INTRODUCTION 7
- 2 - LE LANGAGE ET LES NOTATIONS DE LA THEORIE DES ENSEMBLES 7
- 3 - OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES 11
- 4 - LE PRODUIT CARTESIEN 13
- 5 - COMMENT MONTRER L'EGALITE DE DEUX ENSEMBLES 14
- 6 - FONCTION CARACTERISTIQUE D'UNE PARTIE D'UN ENSEMBLE 16
- 7 - LA DIFFERENCE ENTRE COLLECTION ET ENSEMBLE. LA " THEORIE DES ENSEMBLES " 17

### II - UN PEU DE LOGIQUE

21 à 55

- 1 - INTRODUCTION 21
- 2 - LES RÈGLES DE CONSTRUCTION DE PHRASES MATHÉMATIQUES CORRECTES 22
  - Opérations sur les propositions. Quantificateurs.
- 3 - TRANSFORMATION DE PROPOSITIONS 25
  - Énoncés synonymes. Tables de vérité.  $A \Rightarrow B$ . Négation. Contraposition
- 4 - VÉRITÉ D'UNE PROPOSITION MATHÉMATIQUE 34
  - Axiomes. Théorèmes. Le faux entraîne n'importe quoi.
- 5 - QUELQUES TYPES DE RAISONNEMENTS FRÉQUEMMENT UTILISÉS 40
  - Contraposition. Absurde.  $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ . Il faut que, il suffit que. Réduction d'un problème. Condition nécessaire, condition suffisante. Analyse, synthèse. Contre-exemple. Démarche de la recherche. Démontrer.
- 6 - CHOIX DES LETTRES POUR REPRÉSENTER LES VARIABLES; LETTRES MUTES 51

### III - FONCTIONS. APPLICATIONS

57 à 66

- 1 - LA DÉFINITION 57
  - Évolution de la définition jusqu'à la définition moderne
- 2 - MOYENS DE SE DONNER UNE FONCTION 58
- 3 - NOTATIONS 60
- 4 - IMAGE D'UN ENSEMBLE PAR UNE APPLICATION; IMAGE RÉCIPROQUE D'UN ENSEMBLE PAR UNE APPLICATION 62
- 5 - FONCTION INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE 63
- 6 - ENSEMBLE DES APPLICATIONS DE E VERS F 64
- 7 - APPLICATIONS RÉCIPROQUES 65
- 8 - PROLONGEMENT ET RESTRICTION D'UNE FONCTION 65

### IV - FAMILLES D'ÉLÉMENTS

67 à 75

- 1 - INTRODUCTION 67
  - Notion intuitive d'indice et de famille indexée
- 2 - DÉFINITION D'UNE FAMILLE 67
- 3 - FAMILLES DE PARTIES D'UN ENSEMBLE 68
- 4 - DIFFÉRENTS EXEMPLES ET REMARQUES 69
  - Sous-famille. Suite. Changement d'indice.
- 5 - SOMME D'UNE FAMILLE D'ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE 72
  - Transformation de formules comportant un ou des S
- 6 - PRODUIT D'UNE FAMILLE D'ÉLÉMENTS 75

### V - RELATIONS D'ORDRE

77 à 88

- 0 - INTRODUCTION 77
  - Définition d'une relation. Différents types de relations.
- 1 - DÉFINITIONS ET EXEMPLES 80
- 2 - ÉLÉMENTS REMARQUABLES 81
  - Plus grand élément, élément maximum. Majorant. Borne supérieure d'une partie, d'une fonction. Élément maximal. Plus petit élément. Minorant. Borne inférieure. Élément minimal.

<b>VI - RELATIONS D'EQUIVALENCE ET ENSEMBLES QUOTIENTS</b>	<b>89 à 104</b>
1 - DEFINITIONS	89
Représentation. Classe d'équivalence. Partition.	
2 - L'ENSEMBLE QUOTIENT	94
3 - APPLICATION CANONIQUE DE E VERS E/R	95
4 - REPRESENTATION DES CLASSES D'EQUIVALENCE ET DE L'ENSEMBLE QUOTIENT	96
Notion de représentation. Choix d'un représentant. Z. Q.	
5 - COMMENT CONSTRUIRE OU DEFINIR UNE FONCTION DONT L'ENSEMBLE DE DEPART EST UN ENSEMBLE QUOTIENT ?	99
Fonction compatible avec une relation d'équivalence	
6 - DECOMPOSITION CANONIQUE D'UNE APPLICATION	102
7 - CONCLUSION	104
<b>VII - CONCLUSION: QUE DEVEZ VOUS SAVOIR DE TOUT CELA</b>	<b>105 à 106</b>
Liste du vocabulaire et des notations à connaitre	

## LES NOMBRES ENTIERS 107

<b>VIII - LES ENTIERS NATURELS</b>	<b>107 à 110</b>
0 - INTRODUCTION	107
1 - DEFINITION ET OPERATIONS	107
2 - LES PROPRIETES UTILES DE N	108
<b>IX - ENSEMBLES FINIS ET INFINIS</b>	<b>111 à 114</b>
1 - NOTATIONS ET DEFINITIONS	111
2 - PROPRIETES DES FONCTIONS SUR UN ENSEMBLE FINI	112
3 - ENSEMBLES INFINIS	113
<b>X - DENOMBREMENT</b>	<b>115 à 120</b>
1 - DEFINITION	115
2 - EXEMPLES	115
3 - TRIANGLE DE PASCAL	116
4 - AUTRES EXEMPLES	118
<b>XI - FORMULES UTILISANT LES COEFFICIENTS DU BINOME</b>	<b>121 à 123</b>
1 - FORMULE DU BINOME DE NEWTON	121
2 - APPLICATIONS DIRECTES DE LA FORMULE DU BINOME	122
3 - UNE ASTUCE	122
<b>XII - ENSEMBLES DENOMBRABLES</b>	<b>125 à 129</b>
1 - DEFINITION	125
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	
2 - PROPRIETES ET EXEMPLES	126
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables	
3 - UNE APPLICATION	128
Existence de nombres transcendants	
<b>XIII - DEMONSTRATIONS PAR RECURRENCE</b>	<b>131 à 133</b>
Récurrence sur $\mathbb{N}$ , sur $\mathbb{N}_n$ , sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Construction de fonctions par récurrence. Induction.	

## ENONCES DES EXERCICES 135

EXERCICES DE THEORIE DES ENSEMBLES	135
EXERCICES SUR LES NOMBRES ENTIERS	136

## CORRECTION DES EXERCICES 139

CORRIGES DES EXERCICES SUR LES ENSEMBLES	139
CORRIGES DES EXERCICES SUR LES ENTIERS	146

## INDEX ( VOCABULAIRE ET NOTATIONS ) 159