

**H. Reinhard**

**Equations  
aux dérivées  
partielles**

**introduction**

**DUNOD**

M 235

# Equations aux dérivées partielles

introduction

**H. REINHARD**

Professeur  
Chaire de mathématiques pour l'ingénieur  
Conservatoire National des Arts et Métiers



4584  $\frac{1}{2}$

DUNOD

# Table des matières

## CHAPITRE I. E.D.P. DU PREMIER ORDRE

Première partie : Etude du système  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

I. DEFINITIONS	4
II. INTEGRALES PREMIERES	7
II.1. Définitions	7
II.2. Fonctions indépendantes	9
II.3. Résolution de S	12

Seconde partie : E.D.P. linéaires du premier ordre

I. ETUDE DE $f(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z)$	15
II. CAS PARTICULIER $f(x,y) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x,y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	17
III. PROBLEME DE CAUCHY	
III.1. Courbes caractéristiques, interprétation géométrique	18
III.2. Résolution du problème de Cauchy	20

Troisième partie : E.D.P. non linéaires du premier ordre

I. ENVELOPPES DE SURFACE	22
I.1. Familles à un paramètre	22
I.2. Familles à deux paramètres	23
I.3. E.D.P. associée à une famille à deux paramètres	26
II. ETUDE DE $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$	
II.1. Définitions	28
II.2. Cas particulier : $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$	29
II.3. Cas général	30

III. ETUDE DE $A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz = 0$	32
IV. RESOLUTION DE $G(x,y,z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$	35
V. PROBLEME DE CAUCHY	36
EXERCICES	39

## CHAPITRE II. GENERALITES

I. CONDITIONS AU BORD, CONDITIONS AUX LIMITES	42
II. PRINCIPE DE SUPERPOSITION DANS LES EQUATIONS LINEAIRES	44
II.1. Equations linéaires	44
II.2. Principe de superposition	47
II.3. Principe de superposition et conditions au bord	48
III. UTILISATION DE TRANSFORMATIONS INTEGRALES	49
III.1. Utilisation de la transformée de Laplace	49
III.2. Utilisation de la transformée de Fourier	50
FORMULAIRE SUR LES TRANSFORMEES DE LAPLACE ET FOURIER	51
EXERCICES	54

## CHAPITRE III. E.D.P. QUASI LINEAIRES DU SECOND ORDRE, CARACTERISTIQUES, CLASSIFICATION, FORMES STANDARD

INTRODUCTION	56
<u>Première partie : Caractéristiques</u>	
I. PROBLEME DE CAUCHY	57
I.1. Caractéristiques	57
I.2. Problème de Cauchy	60
II. CLASSIFICATION	61
<u>Seconde partie : Réduction à la forme standard</u>	
I. CHANGEMENTS DE VARIABLES	63

II. FORMES STANDARD	65
II.1. Equations hyperboliques	65
II.2. Equations paraboliques	67
II.3. Equations elliptiques	68
III. EQUATIONS LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS	69
EXERCICES	71

## CHAPITRE IV. METHODE DE SEPARATION DES VARIABLES

INTRODUCTION : Principe de la méthode de séparation des variables

### Première partie : Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

I. ESPACE DE HILBERT	76
I.1. Produit scalaire et norme	76
I.2. Convergence et espace de Hilbert	79
II. ESPACES DE FONCTIONS DE CARRE INTEGRABLE	82
II.1. Espace $L^2(a,b)$	82
II.2. Espace $L^2_{\sigma}(a,b)$	86
III. BASES D'UN ESPACE DE HILBERT	87
III.1. Bases, approximation des moindres carrés	87
III.2. Séries de Fourier	90
IV. VALEURS PROPRES DES OPERATEURS LINEAIRES	92

### Seconde partie : Problème de Sturm-Liouville et fonctions spéciales

I. PROBLEME REGULIER DE STURM-LIOUVILLE	95
II. PROBLEME PERIODIQUE DE STURM-LIOUVILLE	97
III. QUELQUES PROBLEMES SINGULIERS : FONCTIONS SPECIALES	98
III.1. Polynômes de Legendre, harmoniques sphériques	98
III.2. Polynômes d'Hermite et de Laguerre	101
III.3. Fonctions de Bessel	103
III.4. Transformée de Hankel	107

Troisième partie : Méthode de séparation des variables

I. EXPOSE DE LA METHODE	108
II. DERIVATION DES SERIES DE FONCTIONS DE 2 VARIABLES	109
III. ETUDE D'UN EXEMPLE	112
IV. SOLUTIONS APPROCHEES	115
V. SERIES DE FOURIER MULTIPLES	116
EXERCICES	119

CHAPITRE V. EQUATIONS HYPERBOLIQUES, EQUATIONS DES ONDESPremière partie : Equations du premier ordre

I. $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$	
I.1. Solutions générales et problème de Cauchy	124
I.2. Propagation des ondes	126
II. $\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$	127
II.1. Etude générale	127
II.2. Equations de l'acoustique	127
II.3. Equations de Maxwell	128
III. EQUATIONS RESOLUBLES A COEFFICIENTS CONSTANTS	130

Seconde partie : Equations des ondes

I. SOLUTIONS FAIBLES	133
II. PROPAGATION DES ONDES	136
II.1. Formule du parallélogramme	137
II.2. Domaines d'influence, de dépendance, de détermination	137
III. EQUATION DES ONDES DANS IR	138
III.1. Formule de D'Alembert	138
III.2. Exemples	139

IV. EQUATION DES ONDES DANS $\mathbb{R}^+$	142
IV.1. Extrémités fixes, ondes réfléchies	142
IV.2. Extrémités libres	146
V. EQUATION DES ONDES SUR UN INTERVALLE BORNE	147
V.1. Réflexion des ondes	147
V.2. Séparation des variables	149
V.3. Solutions faibles	150

### Troisième partie : Equation des ondes avec second membre

I. METHODE DE RIEMANN	151
I.1. Formule de Green-Riemann	151
I.2. Equation avec second membre dans $\mathbb{R}$	154
I.3. Méthode de Riemann, équation des télégraphistes	155
II. DONNEES SUR LES CARACTERISTIQUES	159
II.1. Données sur deux caractéristiques : Pb de Goursat	159
II.2. Données sur une caractéristique	161
III. EQUATION AVEC SECOND MEMBRE SUR UN INTERVALLE BORNE : SEPARATION DES VARIABLES	162

### Quatrième partie : Equation des ondes dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

I. RAPPEL DE GEOMETRIE	166
II. EQUATION DES ONDES DANS $\mathbb{R}^3$	
II.1. Formule de Kirchhoff	168
II.2. Principe d'Huyghens	170
II.3. Ondes sphériques et ondes planes	172
II.4. Potentiels retardés : équation avec second membre	174
III. EQUATIONS DES ONDES DANS $\mathbb{R}^2$ , FORMULE DE POISSON	174
IV. EQUATIONS DES ONDES DANS DES DOMAINES BORNES : SEPARATION DES VARIABLES	176
IV.1. Equation des ondes dans un parallélépipède	176
IV.2. Vibrations d'une membrane circulaire	177

### Cinquième partie : Energie et unicité

EXERCICES	182
-----------	-----

CHAPITRE VI. EQUATION DE LA CHALEURPremière partie : Généralités

I. PRINCIPE DU MAXIMUM	186
II. PROBLEMES DE VALEUR INITIALE (A)	186
II.1. Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}$	188
II.2. Equation avec second membre sur $\mathbb{R}$	190
II.3. Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$	191

Seconde partie : Semi-groupe de la chaleur

I. SOLUTION FONDAMENTALE	194
I.1. Définition	194
I.2. Solution fondamentale et théorie des distributions	195
II. PROBLEMES DE VALEUR INITIALE (B)	196
II.1. Problème sur $\mathbb{R}$	196
II.2. Unicité	198
II.3. Un problème mal posé	199
III. SEMI-GROUPE DE LA CHALEUR	200
III.1. Définition	200
III.2. Comportement des solutions	202
IV. PROBLEMES DE VALEUR INITIALE DANS $\mathbb{R}^2$ OU $\mathbb{R}^3$	203

Troisième partie : Séparation des variables

I. ETUDE DE $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$	205
I.1. Problème régulier élémentaire	205
I.2. Autre problème	206
I.3. Autre problème	206
I.4. Autre problème	207
I.5. Utilisation de la transformée de Laplace	207
II. RESOLUTION D'UN PROBLEME EN COORDONNEES CYLINDRIQUES	208
EXERCICES	210

CHAPITRE VII. EQUATION DE LAPLACE, FONCTIONS HARMONIQUES

INTRODUCTION	214
<u>Première partie : Fonctions harmoniques</u>	
I. FORMULES DE GREEN	216
I.1. Formule d'Ostrogradski-Gauss	216
I.2. Dérivée dans une direction	217
I.3. Formules de Green	218
I.4. Lemme de Green	220
II. PROPRIETES DES FONCTIONS HARMONIQUES	222
II.1. Théorème de la moyenne	222
II.2. Principe du maximum	223
II.3. Régularité des fonctions harmoniques	225
III. PROBLEMES FRONTIERES	227
III.1. Problème de Dirichlet	227
III.2. Problème de Neumann	228
III.3. Problème mixte	231
<u>Seconde partie : Problèmes frontières dans <math>\mathbb{R}^2</math></u>	
I. PROBLEMES DE DIRICHLET RELATIFS A UN DISQUE	232
I.1. Donnée frontière de classe $C^2$	232
I.2. Donnée frontière continue : noyau de Poisson	234
I.3. Donnée frontière discontinue	237
I.4. Problème extérieur	238
II. AUTRES PROBLEMES DANS DES DOMAINES BORNES	239
II.1. Problème de Dirichlet dans un rectangle	239
II.2. Un contre exemple (équation d'Helmholtz)	241
II.3. Problème de Neumann pour un disque	241
III. DOMAINES A FRONTIERE NON BORNEE	243
III.1. Noyau de Poisson du demi-plan $y > 0$	244
III.2. Donnée frontière discontinue	245
III.3. Mise en garde et compléments	246
III.4. Problème de Neumann dans le demi-plan	247

Troisième partie : Problèmes frontières dans  $\mathbb{R}^3$ 

I. PROBLEME DE DIRICHLET POUR UNE SPHERE, HARMONIQUES SPHERIQUES	249
II. PROBLEME DE DIRICHLET POUR UN CYLINDRE	252
EXERCICES	254

CHAPITRE VIII. FONCTIONS DE GREEN

INTRODUCTION	260
--------------	-----

Première partie : Fonctions de Green dans  $\mathbb{R}$ 

I. DEFINITIONS	261
II. PROBLEMES AUTO-ADJOINTS	264
III. DEVELOPPEMENT DE $G$ SELON UNE BASE DE FONCTIONS PROPRES	269

Seconde partie : Eléments de la théorie des distributionsTroisième partie : Fonctions de Green pour les E.D.P.

I. SOLUTIONS FONDAMENTALES	280
II. FONCTIONS DE GREEN POUR LES EQUATIONS DE POISSON, LAPLACE, HELMHOLTZ	283
III. COMPLEMENTS	286
EXERCICES	288
INDEX	290

# H. Reinhard

# Equations

# aux dérivées partielles

## introduction

**S**i de nombreux ouvrages élémentaires exposent les rudiments de la théorie des équations différentielles (étudiées en premier cycle), il existe très peu d'exposés consacrés aux équations aux dérivées partielles.

L'ambition de ce livre est de combler cette lacune et de donner à des étudiants dont le bagage mathématique est assez réduit un minimum de connaissances et de savoir faire.

L'auteur s'est efforcé ici de faire le lien entre les énoncés de caractère mathématique et les phénomènes physiques correspondants, ce que les traités théoriques ou les ouvrages consacrés au calcul numérique occultent ou supposent connu.

L'appareillage mathématique a été limité au niveau nécessaire à une compréhension sérieuse du raisonnement. L'auteur a pris soin d'énoncer des "méthodes pratiques" de calcul et les problèmes pouvant créer quelques confusions ont été isolés sous forme de mise en garde.

Chaque chapitre est suivi d'une série d'exercices dont la résolution permet au lecteur de contrôler la bonne assimilation des méthodes exposées.

9 782100 001279

9 782100 0004

EQUATIONS AUX DERIVE  
195108 TRONCS  
35893 010897  
0004

1  
5  
U  
1

127  
0-000 127-2