

# cours de mathématiques spéciales

1

algèbre

E. RAMIS

C. DESCHAMPS

J. ODOUX

2<sup>e</sup> édition



MASSON

M 227

# COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

par

E. Ramis

*Inspecteur général de l'Instruction Publique*

C. Deschamps

*Professeur de Mathématiques Spéciales  
au Lycée Louis-le-Grand*

J. Odoux

*Professeur de Mathématiques Spéciales  
au Lycée Champollion, à Grenoble*

1

## ALGÈBRE

Classes Préparatoires et Enseignement Supérieur (1<sup>er</sup> cycle)

2<sup>e</sup> édition

5150  
1  
4

MASSON

Paris Milan Barcelone Bonn

1993



# TABLES DES MATIÈRES

<b>1. Ensembles. Relations. Lois de composition</b> .....	<b>1</b>
1.1. Éléments de logique .....	1
1.2. Ensembles. Applications .....	5
1.3. Relations binaires sur un ensemble .....	21
1.4. Ensembles finis .....	30
1.5. Lois de composition .....	39
1.6. Structures algébriques .....	44
<i>Exercices</i> .....	52
<b>2. Groupes</b> .....	<b>58</b>
2.1. Structure de groupe .....	58
2.2. Sous-groupes .....	61
2.3. Groupes - quotients .....	66
2.4. Groupes symétriques .....	70
2.5. Groupes opérant sur un ensemble .....	77
<i>Exercices</i> .....	80
<b>3. Anneaux et corps</b> .....	<b>84</b>
3.1. Structure d'anneau .....	84
3.2. Idéaux. Anneaux - quotients .....	90
3.3. Divisibilité dans les anneaux intègres .....	96
3.4. Corps .....	102
3.5. Structures ordonnées .....	107
<i>Exercices</i> .....	112
<b>4. Modules et espaces vectoriels</b> .....	<b>117</b>
4.1. Modules .....	117
4.2. Sous-modules, modules produits, modules-quotients .....	120
4.3. Intersection et somme de sous-modules .....	124
4.4. Structure d'algèbre .....	129
<i>Exercices</i> .....	130
<b>5. Nombres complexes</b> .....	<b>133</b>
<i>Exercices</i> .....	144
<b>6. Polynômes</b> .....	<b>148</b>
6.1. Algèbre des polynômes à une indéterminée .....	148
6.2. Division euclidienne. Propriétés arithmétiques de $K[X]$ .....	156
6.3. Division suivant les puissances croissantes .....	168
6.4. Dérivation. Racines .....	170
6.5. Etude de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ .....	177
6.6. Extension d'un corps .....	182
6.7. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées .....	185
6.8. Dérivation partielle des polynômes .....	193
6.9. Propriétés arithmétiques de $K[X_1, \dots, X_n]$ .....	197
6.10. Polynômes symétriques .....	200
<i>Exercices</i> .....	209

<b>7. Fractions rationnelles à une ou plusieurs indéterminées</b> .....	21
7.1. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée .....	21
7.2. Théorie de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples .....	22
7.3. Pratique de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Applications .....	23
7.4. Notions sur les séries formelles à une indéterminée .....	23
7.5. Corps des fractions rationnelles à plusieurs indéterminées .....	24
<i>Exercices</i> .....	24
<b>8. Equations algébriques</b> .....	249
8.1. Relations entre coefficients et racines .....	249
8.2. Elimination. Résultant .....	254
8.3. Transformation des équations algébriques .....	268
8.4. L'équation du troisième degré sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ . .....	277
<i>Exercices</i> .....	279
<b>9. Algèbre linéaire</b> .....	283
9.1. Indépendance linéaire. Bases .....	283
9.2. Espaces vectoriels de dimension finie .....	290
9.3. Dualité .....	302
9.4. Matrices .....	314
<i>Exercices</i> .....	332
<b>10. Formes multilinéaires, déterminants</b> .....	341
10.1. Applications multilinéaires .....	341
10.2. Déterminants .....	345
10.3. Calcul des déterminants .....	353
10.4. Formes multilinéaires alternées .....	361
<i>Exercices</i> .....	368
<b>11. Applications des déterminants</b> .....	372
11.1. Détermination pratique d'un rang .....	372
11.2. Equations linéaires .....	375
<i>Exercices</i> .....	389
<b>12. Réduction des endomorphismes</b> .....	394
12.1. Sous-espaces propres .....	395
12.2. Diagonalisation, trigonalisation .....	397
12.3. Polynômes d'endomorphismes .....	408
<i>Exercices</i> .....	424
INDEX ALPHABÉTIQUE .....	435
INDEX DES NOTATIONS .....	439

<b>7. Fractions rationnelles à une ou plusieurs indéterminées</b> .....	214
7.1. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée .....	214
7.2. Théorie de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples .....	220
7.3. Pratique de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. Applications .....	230
7.4. Notions sur les séries formelles à une indéterminée .....	237
7.5. Corps des fractions rationnelles à plusieurs indéterminées .....	241
<i>Exercices</i> .....	244
<b>8. Equations algébriques</b> .....	249
8.1. Relations entre coefficients et racines .....	249
8.2. Elimination. Résultant .....	254
8.3. Transformation des équations algébriques .....	268
8.4. L'équation du troisième degré sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ . <i>Exercices</i> .....	277 279
<b>9. Algèbre linéaire</b> .....	283
9.1. Indépendance linéaire. Bases .....	283
9.2. Espaces vectoriels de dimension finie .....	290
9.3. Dualité .....	302
9.4. Matrices .....	314
<i>Exercices</i> .....	332
<b>10. Formes multilinéaires, déterminants</b> .....	341
10.1. Applications multilinéaires .....	341
10.2. Déterminants .....	345
10.3. Calcul des déterminants .....	353
10.4. Formes multilinéaires alternées .....	361
<i>Exercices</i> .....	368
<b>11. Applications des déterminants</b> .....	372
11.1. Détermination pratique d'un rang .....	372
11.2. Equations linéaires .....	375
<i>Exercices</i> .....	389
<b>12. Réduction des endomorphismes</b> .....	394
12.1. Sous-espaces propres .....	395
12.2. Diagonalisation, trigonalisation .....	397
12.3. Polynômes d'endomorphismes .....	408
<i>Exercices</i> .....	424
INDEX ALPHABÉTIQUE .....	435
INDEX DES NOTATIONS .....	439