

NOTIONS DE **TOPOLOGIE**
INTRODUCTION **ESPACES**
AUX **FONCTIONNELS**

CLAUDE TISSERON

Hermann
Paris



Collection
Méthodes

Claude Tisseron

M. 22
INT.

M 22.

NOTIONS DE TOPOLOGIE

INTRODUCTION AUX ESPACES FONCTIONNELS

1321

$\frac{3}{3}$



Hermann  Collection
Paris *Méthodes*

Table

INTRODUCTION

Chapitre I NOTIONS DE TOPOLOGIE

1 - <u>Généralités sur les espaces métriques</u>	3
1.1 Distance euclidienne sur le plan	3
1.2 Autres exemples de distances	6
1.3 Espaces métriques	10
1.4 Propriétés particulières à la droite réelle	17
1.5 Exercices	22
2 - <u>Espaces topologiques, notions usuelles</u>	25
2.1 Ouverts, fermés	25
2.2 Bases, espaces séparables	30
2.3 Applications continues	34
2.4 Sous-espaces	38
2.5 Espaces produits	40
2.6 Critère de séparation, applications	46
3 - <u>Limites</u>	48
3.1 La notion de limite	48
3.2 Conditions d'existence pour les espaces métriques	51
3.3 Propriétés des limites	52
3.4 Applications aux espaces normés	56
3.5 Prolongement d'une application par continuité	58
4- <u>Exercices et problèmes sur le chapitre I</u>	62

Chapitre II ESPACES PARTICULIERS

1 - <u>Espaces connexes</u>	73
1.1 Définitions et propriétés immédiates	73
1.2 Exemples	76

1.3	Connexité par arcs	78
1.4	Espaces localement connexes	80
1.5	Exercices	81
2	<u>Espaces compacts</u>	83
2.1	Définitions et exemples	83
2.2	Propriétés des compacts	85
2.3	Fonctions continues sur un compact	88
2.4	Produit d'espaces compacts	90
2.5	Espaces localement compact	93
2.6	Exercices	96
3	<u>Espaces métriques complets</u>	99
3.1	Généralités	99
3.2	Propriétés usuelles	102
3.3	Rapport entre espaces métriques complets et espaces métriques compacts	104
3.4	Complétion d'un espace métrique	109
3.5	Théorème du point fixe	111
3.6	Théorème de Baire	113
4	<u>Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn</u>	117
4.1	Le théorème de Tietze-Urysohn	117
4.2	Séparation des fermés par des fonctions continues	118
4.3	Diverses notions de séparation	119
5	<u>Exercices et problèmes sur le chapitre II</u>	121

Chapitre III ESPACES NORMES

Introduction

126

1 - Généralités

128

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

128

1.2 Sous-espaces, espaces produits

131

1.3 Séries

133

1.4 Familles totales, bases topologiques

137

145

6.3 Le théo

Applica

- exist

6.4 Le théo

Applica

- théor

- conti

6.5 Exercice

150

normés de dimension finie

150

réhilbertiens

152

e fonctions bornées

153

s $\|\cdot\|_\alpha$ sur $C([a,b],K)$ pour $\alpha > 1$

157

Les normes $\|\cdot\|_\alpha$ sur

pour $\alpha > 1$

Normes et applications linéaires continues

Espaces normés

2.8	Problèmes	168
3	<u>Familles sommables</u>	180
3.1	Définitions, exemples	181
3.2	La condition de Cauchy	186
3.3	Familles absolument sommables dans un Banach	190
3.4	Cas des espaces de dimension finie	193
3.5	Exercices	194
4	<u>Espaces de Hilbert</u>	196
4.1	Généralités, rappels d'algèbre	197
4.2	Exemples	203
4.3	Théorèmes de projection	208
4.4	Applications	213
	- densité d'un sous-espace	214
	- existence des bases hilbertiennes	214
	- dual topologique d'un espace hilbertien	215
	- adjoint d'un opérateur	217
4.5	Familles orthonormales	224
4.6	Le théorème spectral pour les opérateurs hermitiens compacts	231
4.7	Exercices	239
5	<u>Espaces de fonctions continues</u>	240
5.1	Espaces de fonctions continues bornées	243
5.2	Le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass	249
5.3	Applications	251
	- approximation des fonctions périodiques	254
	- une base hilbertienne de $C(I, C_2)$	259
5.4	Ensemble équicontinues, théorème d'Ascoli	267
5.5	Exercices et problèmes	267
6	<u>Quelques grands classiques</u>	271
6.1	Le théorème de Hahn Banach	271
6.2	Applications	272
	- séparation des points par des formes linéaires continues	271
	- l'isométrie de E dans son bidual	272
	- caractérisation de l'adhérence d'un sous-espace	273
	- le théorème de Gelfand-Mazur	276
6.3	Le théorème de Banach-Steinhaus	278
	Applications :	284
	- existence de fonctions continues dont la série de Fourier diverge	287
6.4	Le théorème de l'application ouverte	288
	Applications :	288
	- théorème du graphe fermé	290
	- continuité d'une application linéaire	
6.5	Exercices	

APPENDICE : Compléments de théorie des ensembles	297
BIBLIOGRAPHIE	307
INDEX DES NOTATIONS	309
INDEX TERMINOLOGIQUE	311
INDEX DES AUTEURS CITES	317

