

# **Mathématiques supérieures pour l'homme moderne**

## **3 - Analyse élémentaire**



**Formation continue  
des cadres  
et ingénieurs**

**Dunod**

M 215

ASSOCIATION D'ÉTUDE POUR  
L'EXPANSION DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

# Mathématiques supérieures pour l'Homme moderne

Formation continue des cadres et ingénieurs

## 3-ANALYSE ÉLÉMENTAIRE



Ont participé à la rédaction de l'ouvrage :

- M<sup>me</sup> Y. AMICE, *Professeur à l'Université de Paris VII*
- Edouard DEHAME, *Professeur de Mathématiques supérieures à Poitiers*
- Michel DEPAIX, *Professeur à l'Université de Nancy*
- Michel LAUDET, *Directeur de l'U. E. R. d'Informatique de Toulouse*
- André LICHNEROWICZ, *Professeur au Collège de France*
- M<sup>me</sup> G. REVUZ, *Maître-assistante à l'Université de Poitiers*
- André REVUZ, *Professeur à l'Université de Paris VII*

IDC 1433 1/1

**DUNOD**  
Paris-Bruzelles-Montréal

# Table des matières

## Chapitre 1. NOTIONS DE CONTINUITÉ

1.1	De la notion intuitive à la définition mathématique.....	1
1.2	La notion générale de continuité (espaces métriques quelconques)...	3
1.3	La continuité dans les espaces métriques usuels.....	7
1.4	Opérations sur les fonctions continues.....	13
1.5	Applications continues d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ .....	17
1.6	Bijections continues d'un intervalle sur un intervalle.....	21
1.7	Fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples.....	23
1.8	Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.....	30
1.9	Fonctions vectorielles d'une variable réelle.....	32
1.10	Fonctions vectorielles de plusieurs variables réelles.....	33

## Chapitre 2. NOTION DE LIMITE

2.1	Suites convergentes.....	37
2.2	Critère de Cauchy. Espaces métriques complets.....	41
2.3	Opérations sur les suites convergentes de réels.....	43
2.4	Suites divergentes.....	46
2.5	Suites monotones de réels.....	48
2.6	Limite en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.....	50
2.7	Limite à l'infini d'une fonction réelle d'une variable réelle.....	54
2.8	Généralisation des définitions précédentes.....	56
2.9	Propriétés des fonctions admettant une limite finie.....	57
2.10	Quelques limites usuelles.....	61

## Chapitre 3. DÉRIVÉS ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

3.1	Préliminaires.....	63
3.2	Dérivabilité en un point $x_0$ .....	66
3.3	Différentiabilité en un point $x_0$ .....	68
3.4	Fonction affine tangente. Tangente au graphe.....	71
3.5	Notation de la différentielle.....	72
3.6	Fonctions différentiables sur un intervalle.....	74
3.7	Composition des fonctions différentiables.....	75
3.8	Propriétés de linéarité.....	78
3.9	Produit de fonctions différentiables.....	79
3.10	Quotient de fonctions différentiables.....	82
3.11	Fonction réciproque d'une fonction différentiable.....	84
3.12	Dérivées des fonctions usuelles.....	86

**Chapitre 4. LA NOTION GÉNÉRALE DE DIFFÉRENTIABILITÉ**

4.1	Définition .....	90
4.2	Propriétés fondamentales .....	93
4.3	Applications différentiables de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ . Généralités .....	95
4.4	Cas d'une fonction vectorielle d'une variable réelle ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) .....	96
4.5	Cas d'une fonction réelle de plusieurs variables réelles ( $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ) .....	99
4.6	Cas général ( $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) .....	105
4.7	Calcul des différentielles. Différentielle d'une somme et d'un produit .....	107
4.8	Matrice jacobienne de la composée de deux fonctions différentiables .....	111
4.9	Matrice jacobienne de la réciproque d'une fonction différentiable .....	115
4.10	Notions sur les fonctions implicites .....	117

**Chapitre 5. THÉORÈME DE LA MOYENNE ET FORMULE DE TAYLOR**

5.1	Théorème de la moyenne pour une fonction réelle d'une variable réelle .....	121
5.2	Application aux primitives .....	126
5.3	Application au sens de variation d'une fonction .....	128
5.4	Théorème de la moyenne pour une fonction vectorielle .....	129
5.5	Théorème de la moyenne pour une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ .....	131
5.6	Formule de Taylor pour une fonction réelle d'une variable réelle .....	135
5.7	Application aux polynômes .....	138
5.8	Application aux développements limités .....	139
5.9	Formule de Taylor pour une fonction vectorielle .....	142
5.10	Formule de Taylor à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables .....	143
	Appendice. Formules particulières aux fonctions à valeurs réelles .....	144

**Chapitre 6. FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES. ISOMORPHISMES CONTINUS**

6.1	La fonction logarithme népérien .....	148
6.2	La fonction exponentielle, fonction réciproque de la fonction logarithme népérien .....	154
6.3	Le nombre $e$ . Nouvelle notation de l'exponentielle .....	158
6.4	Caractérisation des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .....	161
6.5	Les fonctions « logarithme de base $b$ » .....	162
6.6	Les fonctions « exponentielle de base $b$ » .....	164
6.7	Fonctions puissances .....	166
6.8	Fonctions hyperboliques directes et réciproques .....	170
6.9	La fonction exponentielle complexe .....	174

**Chapitre 7. RECHERCHE DES PRIMITIVES**

7.1	Généralités .....	177
7.2	Premiers exemples de primitives .....	179
7.3	Utilisation de la linéarité .....	184
7.4	Méthode dite du « changement de variable » .....	188
7.5	Méthode dite d'« intégration par parties » .....	197

<b>Chapitre 8. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE</b>	
8.1	Préliminaires ..... 200
8.2	Equations différentielles à variables séparées ..... 201
8.3	Equations différentielles linéaires du premier ordre ..... 206
<b>Chapitre 9. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS</b>	
9.1	Préliminaires ..... 212
9.2	Etude des systèmes homogènes ..... 215
9.3	Systèmes linéaires non homogènes ..... 222
9.4	Systèmes linéaires réels ..... 225
<b>Chapitre 10. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE <math>n</math>, A COEFFICIENTS CONSTANTS</b>	
10.1	Théorèmes généraux (cas du second ordre) ..... 230
10.2	Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants ..... 236
10.3	Résolution d'une équation linéaire non homogène du second ordre ..... 239
10.4	Généralisation aux équations d'ordre $n$ ..... 246
10.5	Exemple de système linéaire d'ordre supérieur à 1 ..... 249
<b>Chapitre 11. PROBLÈMES SUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES</b>	
11.1	Intégration d'une forme différentielle ..... 251
11.2	Exemples d'équations aux dérivées partielles ..... 256
<b>Chapitre 12. SÉRIES NUMÉRIQUES. GÉNÉRALITÉS</b>	
12.1	Position du problème ..... 258
12.2	Définitions relatives aux séries ..... 259
12.3	Le critère de Cauchy pour les séries ..... 260
12.4	Addition et multiplication par un scalaire ..... 261
<b>Chapitre 13. SÉRIES A TERMES POSITIFS</b>	
13.1	Une condition nécessaire et suffisante de convergence ..... 263
13.2	Exemples de séries à termes positifs ..... 263
13.3	Comparaison des séries à termes positifs ..... 267
13.4	Comparaison à la série géométrique ..... 268
13.5	Comparaison à une série de Riemann ..... 270

## Chapitre 14. SÉRIES ABSOLUMENT CONVERGENTES. FAMILLES SOMMABLES

14.1	Convergence absolue et convergence.....	273
14.2	Critères de convergence absolue.....	274
14.3	Commutativité des séries absolument convergentes.....	276
14.4	Familles sommables.....	277
14.5	Associativité des familles sommables.....	279
14.6	Opérations sur les séries absolument convergentes.....	282

## Chapitre 15. CONVERGENCE NON ABSOLUE

15.1	Séries alternées.....	285
15.2	Associativité restreinte, non-commutativité.....	286
15.3	Opérations sur les séries convergentes (absolument ou non).....	288

Index .....	291
-------------	-----

# MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES POUR L'HOMME MODERNE

---

- Tome 1 — ***Structures algébriques élémentaires***  
Tome 2 — ***Algèbre linéaire***  
Tome 3 — ***Analyse élémentaire***  
Tome 4 — ***Analyse numérique élémentaire***  
Tome 5 — ***Intégration***  
Tome 6 — ***Analyse fonctionnelle***

Le terme de mathématiques modernes, qui décrit un aspect du développement de cette science, donne souvent lieu à un fâcheux contresens, celui de deux mathématiques qui entreraient en conflit.

En fait, la mathématique n'a cessé, depuis toujours, d'évoluer et de se développer sans jamais se renier. Si elle a connu, au cours des cent cinquante dernières années, une évolution plus profonde que durant toutes les précédentes, elle a cependant recueilli l'héritage des siècles passés et l'a fait fructifier.

De plus, la collaboration de la mathématique avec les autres disciplines n'a cessé de s'accroître. Ceci tant pour appliquer des résultats et des méthodes connus que pour en créer de nouveaux à partir des problèmes posés.

C'est dire que l'homme moderne voit son efficacité dépendre de sa formation mathématique, formation qui ne peut être acquise dans l'isolement à l'égard des autres activités humaines.

« Mathématiques supérieures pour l'homme moderne » présente, à un stade relativement élémentaire et en échelonnant les difficultés, les principaux outils mathématiques, dont les possibilités d'utilisation sont très nombreuses.

Conçu pour la formation continue des cadres et ingénieurs, l'ouvrage donne une base solide à la culture mathématique de l'homme moderne.

---

ISBN 2-04-007664-6