

COLLECTION **U**

M. ZISMAN

**TOPOLOGIE  
ALGEBRIQUE  
ELEMENTAIRE**

MAITRISE DE MATHEMATIQUES

ARMAND COLIN

M 211

Série « Mathématiques » dirigée par André REVUZ

Michel ZISMAN

Professeur à l'Université de Paris VII

# TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE



Maîtrise de Mathématiques

IDC 1436  $\frac{1}{1}$

LIBRAIRIE ARMAND COLIN

103, boulevard Saint-Michel, PARIS 5<sup>e</sup>

# TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS .....	5
<b>Chapitre 1. Généralités</b> .....	<b>7</b>
1.1 <i>Les catégories</i> .....	7
1.1.1 Définitions .....	7
1.1.2 Sommes et Produits .....	9
1.1.3 Sommes amalgamées, produits fibrés .....	14
1.1.4 Les sphères comme sommes amalgamées .....	20
1.1.5 L'espace projectif réel .....	21
1.1.6 Exercices .....	22
1.2 <i>Les foncteurs</i> .....	31
1.2.1 Définitions .....	31
1.2.2 Premiers exemples .....	32
1.2.3 Les foncteurs $? \times Y$ et $\text{CO}(Y, ?)$ .....	32
1.2.4 Exercices .....	36
<b>Chapitre 2. Le groupe fondamental</b> .....	<b>37</b>
2.1 <i>Groupeïde de Poincaré</i> .....	37
2.1.1 Définition des groupeïdes .....	37
2.1.2 Quelques exemples .....	38
2.1.3 Les foncteurs $\pi_0$ et $\pi_1$ .....	38
2.1.4 Homotopies .....	39
2.1.5 Le groupeïde $\pi X$ .....	41
2.2 <i>Théorème de Van Kampen</i> .....	45
2.3 <i>Groupe fondamentale</i> .....	49
2.3.1 Définition .....	49
2.3.2 Espaces topologiques pointés .....	50
2.3.3 Homotopies .....	52
2.3.4 Retracts par déformation .....	54
2.3.5 Exercices .....	55
2.4 <i>Premières applications du théorème de Van Kampen</i> .....	60
2.4.1 Retraction dans les groupeïdes .....	60
2.4.2 Théorème de Van Kampen .....	62
2.4.3 Exercices .....	67
2.4.4 Calcul de $\pi_1(S^n)$ .....	68
2.4.5 Exercices .....	71
2.4.6 Le degré d'une application $S^1 \rightarrow S^1$ .....	78
2.4.7 Quelques applications .....	84
2.4.8 Exercices .....	86

2.5	<i>Le théorème du cône</i> .....	87
2.5.1	Cônes .....	87
2.5.2	Cône d'une application .....	90
2.5.3	Le théorème principal (théorème du cône) .....	91
2.5.4	Démonstration du théorème .....	93
2.5.5	Exercices .....	99
<b>Chapitre 3. Introduction à l'étude des CW complexes</b> .....		<b>101</b>
3.1	<i>La propriété d'extension des homotopies</i> .....	101
3.1.1	Définition .....	101
3.1.2	Compatibilité avec les sommes amalgamées .....	102
3.1.3	Passage au quotient .....	104
3.1.4	Exercices .....	107
3.2	<i>Filtrations</i> .....	109
3.2.1	Définition .....	109
3.2.2	Exemples .....	109
3.2.3	Compacts et filtration .....	109
3.2.4	La P. E. H. et les filtrations .....	110
3.2.5	Exercices .....	111
3.3	<i>CW complexes</i> .....	113
3.3.1	Définition .....	113
3.3.2	Quelques théorèmes de topologie .....	117
3.3.3	Sous-CW complexes .....	121
3.3.4	Le groupe fondamental d'un CW complexe .....	123
3.3.5	Exercices .....	128
<b>Chapitre 4. Homologie des modules différentiels gradués</b> .....		<b>132</b>
4.1	<i>Suites exactes</i> .....	132
4.1.1	Définitions .....	132
4.1.2	Exemples .....	132
4.1.3	Le lemme des 5 .....	133
4.2	<i>Modules différentiels gradués</i> .....	134
4.2.1	Définitions .....	134
4.2.2	Quelques exemples .....	136
4.2.3	Homotopies .....	138
4.2.4	Sous-complexes, complexes quotients, suites exactes .....	139
4.2.5	La suite exacte d'homologie .....	141
4.2.6	Exercices .....	144
<b>Chapitre 5. Homologie singulière</b> .....		<b>147</b>
5.1	<i>Simplexes</i> .....	147
5.1.1	Simplexes .....	147
5.1.2	Faces .....	149
5.1.3	Prismes .....	149

5.2	<i>Chaînes singulières et homologie singulière</i> .....	152
5.2.1	Quelques rappels sur les modules libres .....	152
5.2.2	Les simplexes singuliers .....	153
5.2.3	Chaînes singulières .....	153
5.2.4	Exercices .....	155
5.2.5	Étude de $H_0$ ; l'homologie réduite .....	157
5.2.6	Homologie relative .....	162
5.3	<i>Les théorèmes fondamentaux</i> .....	165
5.3.1	Invariance par homotopie .....	165
5.3.2	Utilisation d'un recouvrement ; le théorème des chaînes $\mathcal{U}$ -petites ..	167
5.3.3	Le théorème de Mayer-Vietoris .....	170
5.3.4	Le théorème du cône .....	175
5.3.5	Exercices .....	177
5.4	<i>Premiers exemples</i> .....	178
5.4.1	Homologie de $S^n$ .....	178
5.4.2	Exercices .....	183
5.4.3	Orientation de $S^n$ , degré d'une application $S^n \rightarrow S^n$ .....	185
5.4.4	Exercices .....	198
5.5	<i>Quelques applications</i> .....	201
<b>Chapitre 6.</b>	<b>Divers compléments</b> .....	<b>204</b>
6.1	<i>Homologie des CW complexes</i> .....	204
6.1.1	Filtrations .....	204
6.1.2	Homologie des CW complexes .....	207
6.1.3	Exercices .....	210
6.2	<i>Compléments algébriques</i> .....	212
6.2.1	Résolutions de complexes .....	212
6.2.2	Un théorème d'homotopie .....	216
6.2.3	Complexe associé à un recouvrement d'un ensemble .....	219
6.2.4	Exercices .....	222
6.3	<i>Applications à la topologie</i> .....	223
6.3.1	Le nerf d'un recouvrement .....	223
6.3.2	Les polyèdres .....	229
6.3.3	Exercices .....	232
6.3.4	Applications aux sphères .....	233
6.3.5	Exercices .....	241

# TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ÉLÉMENTAIRE

## (MAÎTRISE DE MATHÉMATIQUES)

### L'OUVRAGE

C'est un traité de topologie algébrique élémentaire et non un traité des éléments de topologie algébrique ; son but est de montrer comment on peut, dans certains cas, ramener l'étude d'un problème de topologie à celle d'un problème d'algèbre, en introduisant le groupe fondamental et l'homologie singulière d'un espace topologique.

Cette méthode de démonstration est illustrée par de nombreux exemples concrets : sphères, espaces projectifs, tores et, plus généralement,  $cw$ -complexes. Des exercices sont incorporés au texte et, pour les plus typiques, des solutions complètes ont été rédigées.

Parmi les résultats obtenus, on peut citer : l'orientation des sphères, la théorie du degré, les théorèmes de Brouwer, de Borsuk-Ulam et de Jordan.

### LE PUBLIC

Conçu comme un outil d'enseignement destiné essentiellement à des étudiants de maîtrise de mathématiques, cet ouvrage pourra être utilisé par des étudiants préparant une unité de valeur de topologie algébrique ou un C3 dont il couvre une partie du programme ; il pourra aussi servir à certains étudiants de 3<sup>e</sup> cycle.

### L'AUTEUR

**Michel ZISMAN** est professeur à l'Université de Paris VII.

---

MATHÉMATIQUES

série dirigée par ANDRÉ REVUZ