

COLLECTION UNIVERSITAIRE DE MATHÉMATIQUES  
DIRECTEUR : HENRI HIERCHE

1

Marc ZAMANSKY

**introduction  
à  
l'algèbre  
et  
l'analyse  
modernes**

DUNOD

M 208

COLLECTION UNIVERSITAIRE DE MATHÉMATIQUES

Marc ZAMANSKY

Professeur et Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

INTRODUCTION  
A  
L'ALGÈBRE ET L'ANALYSE  
MODERNES

BIBLIOTHÈQUE COMMUNALE  
TIZI-OUZOU



TROISIÈME ÉDITION

IDE 1458 1/1

**DUNOD**  
PARIS  
1967

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE PREMIER

### Opérations sur les ensembles. Fonctions. Équivalence. Ordre.

#### *Première Partie*

Opérations sur les ensembles .....	1
1. — Expressions, symboles, premières définitions .....	1
2. — Parties d'un ensemble, complémentaire, partie vide .....	2
3. — Réunion .....	3
4. — Intersection .....	4
5. — Produit .....	4
6. — Propriétés des opérations sur les ensembles .....	5

#### *Deuxième Partie*

Fonctions ou applications .....	5
1. — Premières définitions .....	5
2. — Applications dans, applications sur, application biunivoque ..	7
3. — Extension d'une fonction aux ensembles de parties .....	8
4. — Application réciproque .....	9
5. — Application composée .....	11
6. — Suites .....	11
7. — Opérations sur des familles d'ensembles .....	13

#### *Troisième Partie*

Équivalence .....	14
Relations binaires .....	15

#### *Quatrième Partie*

Ordre.....	18
------------	----

## CHAPITRE II

### Lois algébriques.

#### *Première Partie*

Lois de compositions internes .....	22
1. — Définition et notation d'une loi de composition interne .....	22

2. — Associativité.....	23
3. — Commutativité .....	23
4. — Éléments réguliers.....	24
5. — Élément neutre .....	24
6. — Éléments symétriques .....	24
7. — Notion d'isomorphisme de deux lois internes .....	26
8. — Distributivité d'une loi par rapport à une autre .....	27
<i>Deuxième Partie</i>	
Lois de composition internes particulières : Groupes, anneaux, corps.....	28
1. — Groupes.....	28
2. — Anneaux .....	31
3. — Corps .....	32
4. — Relation d'équivalence sur un groupe abélien. Groupe quotient.....	34
5. — Relations d'équivalence sur un anneau commutatif. Idéaux...	35
6. — Groupes ordonnés. Groupes de Riesz .....	36
<i>Troisième Partie</i>	
Ensemble symétrisé d'un ensemble muni d'une loi associative et commutative. Corps des fractions d'un anneau sans diviseur de zéro .....	42
1. — Premier problème. Ensemble symétrisé.....	43
2. — Entiers rationnels, nombres rationnels positifs .....	46
3. — Multiplication sur l'ensemble des entiers rationnels, addition sur l'ensemble des nombres rationnels positifs.....	47
4. — Deuxième problème. Corps des fractions d'un anneau sans diviseur de zéro .....	48
<i>Quatrième Partie</i>	
Lois externes. Espaces vectoriels .....	50
1. — Généralités .....	50
2. — Espace vectoriel sur un corps .....	51
3. — Constructions d'espaces vectoriels. Exemples.....	54
<i>Cinquième Partie</i>	
Lois et relations sur un ensemble de fonctions.....	58
<b>CHAPITRE III</b>	
<b>Algèbre linéaire.</b>	
<i>Première Partie</i>	
Espaces vectoriels .....	61
1. — Éléments linéairement indépendants. Bases.....	61
2. — Espace vectoriel de dimension finie .....	63
3. — Algèbres sur un corps .....	65

*Deuxième Partie*

Applications linéaires. Formes linéaires .....	68
1. — Définitions .....	68
2. — Opérations sur les applications linéaires .....	69
3. — Propriétés des applications linéaires .....	70
4. — Cas des espaces vectoriels de dimension finie .....	73
5. — Somme directe. Espace quotient .....	75
6. — Rang d'une application linéaire .....	77
7. — Formes linéaires. Dual .....	79
8. — Transposée d'une application linéaire .....	81
9. — Équations linéaires .....	83

*Troisième Partie*

Matrices sur un corps .....	89
1. — Définition des matrices rectangulaires .....	89
2. — Opérations algébriques sur les matrices .....	91
3. — Représentation d'une application linéaire par un produit de matrices .....	94
4. — Matrices carrées .....	94
5. — Rang d'une matrice. Transposée d'une matrice .....	96
6. — Application des matrices aux équations linéaires .....	97

## CHAPITRE IV

**Algèbre multilinéaire.***Première Partie*

Applications bilinéaires. Produit tensoriel .....	98
1. — Applications bilinéaires .....	98
2. — Produit tensoriel de deux espaces vectoriels .....	100
3. — Généralisations .....	103

*Deuxième Partie*

Puissance extérieure d'un espace vectoriel. Produit extérieur d'éléments ..	104
1. — Puissance extérieure d'ordre 2 .....	104
2. — Généralisations .....	108

*Troisième Partie*

Puissances extérieures d'une application linéaire. Déterminants .....	111
1. — Puissances extérieures d'une application linéaire .....	111
2. — Déterminants .....	112
3. — Déterminants de matrices, déterminants de vecteurs .....	113
4. — Calcul des déterminants. Résolution des équations linéaires. Matrices inversibles .....	115

## CHAPITRE V

**Topologie.***Première Partie*

Familles fondamentales.....	118
1. — Définition. Exemples .....	118
2. — Propriétés .....	120
3. — Comparaison de familles fondamentales .....	122

*Deuxième Partie*

Espaces topologiques .....	123
1. — Définition d'un espace topologique. Base de voisinages ouverts. Base de topologie .....	123
2. — Comparaison et constructions de topologies.....	130
3. — Topologies définies par des familles dénombrables.....	134

*Troisième Partie*

Espaces séparés, compacts, localement compacts, connexes.....	136
1. — Espaces séparés, espaces réguliers.....	136
2. — Espaces compacts .....	138
3. — Espaces localement compacts.....	142
4. — Espaces connexes .....	146

*Quatrième Partie*

Limites, convergence.....	147
1. — Notion de filtre .....	148
2. — Limites dans les espaces topologiques.....	151
3. — Limites dans un espace séparé, dans un espace compact, dans un espace à base dénombrable .....	157

*Cinquième Partie*

Continuité .....	160
1. — Définitions et propriétés générales.....	160
2. — Homéomorphisme .....	162
3. — Fonctions continues, espaces compacts, espaces connexes..	164

## CHAPITRE VI

**Les nombres réels.***Première Partie*

L'ensemble des nombres rationnels.....	166
1. — L'ensemble $Z$ des entiers rationnels .....	166

2. — Rappel de définitions et propriétés de l'ensemble $Q$ des nombres rationnels .....	167
3. — Topologie sur $Q$ .....	168

*Deuxième Partie*

Construction de $R$ et propriétés fondamentales .....	172
1. — Définition de $R$ .....	172
2. — Addition, ordre, valeur absolue sur $R$ .....	173
3. — Le corps $R$ .....	175
4. — Topologie sur $R$ . Les deux propriétés fondamentales .....	176

*Troisième Partie*

La droite numérique .....	179
1. — Éléments fondamentaux de la topologie de $R$ .....	180
2. — Parties compactes, parties connexes de $R$ .....	183
3. — Propriétés d'une fonction numérique continue. Homéomorphisme sur $R$ . La droite achevée $\bar{R}$ .....	188

*Quatrième Partie*

Fonctions numériques sur un ensemble .....	192
1. — Bornes, enveloppes, limites supérieures et inférieures .....	192
2. — Fonctions numériques sur un ensemble dénombrable. Sommes infinies. Séries .....	201

CHAPITRE VII

**Espaces métriques. Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach. Espaces de Hilbert.**

*Première Partie*

Espaces métriques .....	213
1. — Distance .....	213
2. — Topologie d'un espace métrique .....	215
3. — Espaces métriques compacts .....	223
4. — Espaces métriques connexes .....	224
5. — Espaces métriques complets. Complétion d'un espace métrique .....	224
6. — Espaces semi-métriques et espaces métriques associés .....	231
7. — Applications d'un espace métrique dans un espace métrique. Continuité, continuité uniforme, prolongement par continuité .....	232

*Deuxième Partie*

Groupes, espaces vectoriels métriques. Espaces de Banach, de Hilbert ..	235
1. — Groupes métriques. Groupes de Riesz normés .....	237
2. — Espaces vectoriels métriques. Espaces normés. Espaces de Banach .....	243
3. — Espaces de Hilbert .....	253

## CHAPITRE VIII

**Fonctions à valeurs dans un espace métrique. Fonctions en escaliers.  
Fonctions numériques continues et semi-continues.**

*Première Partie*

Notion d'espace fonctionnel .....	261
1. — Convergence simple d'une famille de fonctions.....	261
2. — Topologie sur un ensemble de fonctions à valeurs dans un espace métrique.....	262

*Deuxième Partie*

Fonctions en escalier. Approximation par des fonctions en escalier ....	268
1. — Fonctions en escalier.....	268
2. — Approximation uniforme par des fonctions en escalier....	272

*Troisième Partie*

Fonctions numériques continues sur un espace compact .....	275
1. — Le théorème de Dini.....	276
2. — Le théorème de Weierstrass.....	278

*Quatrième Partie*

Fonctions semi-continues .....	285
1. — Définitions et propriétés générales.....	285
2. — Fonctions semi-continues sur un espace localement compact ou métrique complet.....	290
3. — Enveloppes de fonctions semi-continues.....	292
4. — Les fonctions semi-continues enveloppes de fonctions continues. Le théorème d'Urysohn.....	294

## CHAPITRE IX

**Espaces vectoriels topologiques et applications linéaires.**

*Première Partie*

Espaces vectoriels métriques complets. Les théorèmes de Banach ...	301
--	-----

*Deuxième Partie*

Espaces semi-normés et normés .....	307
1. — Le théorème de Hahn-Banach.....	308
2. — Applications linéaires continues.....	309
3. — Le théorème de Banach-Steinhaus .....	315
4. — Exemples.....	317

## CHAPITRE X

## Intégration.

*Première Partie*

Mesures numériques sur un espace de Riesz .....	331
1. — Introduction et recherche des hypothèses initiales .....	331
2. — Mesure positive sur un espace de Riesz de fonctions numériques. Axiome (J) .....	333
3. — Mesure positive sur un espace de fonctions en escalier...	335
4. — Mesure de Radon positive.....	339
5. — Généralisation de la notion de mesure.....	342

*Deuxième Partie*

Construction de l'espace $\mathfrak{L}$ .....	345
1. — Ensembles négligeables. Nouvelle forme de l'axiome (J) ..	346
2. — Constructions de $\mathfrak{L}$ et $L$ .....	349
3. — Le théorème de l'intégration .....	352

*Troisième Partie*

Propriétés de $\mathfrak{L}$ .....	354
1. — Fonctions négligeables .....	354
2. — Suites de Cauchy dans $\mathfrak{L}$ .....	355
3. — Intégration d'une suite de fonctions de $\mathfrak{L}$ .....	357

*Quatrième Partie*

Ensembles mesurables .....	363
1. — Définitions générales .....	363
2. — Cas d'une mesure sur un clan .....	366
3. — Cas d'une mesure de Radon.....	368

*Cinquième Partie*

Les espaces $\mathfrak{L}^p$ .....	370
1. — Les inégalités de Hölder et de Minkowski .....	370
2. — Constructions et propriétés de $\mathfrak{L}^p$ ( $1 \leq p < +\infty$ ) .....	373
3. — Relations entre les espaces $\mathfrak{L}^p$ ( $1 \leq p < +\infty$ ) .....	376
4. — Les espaces $\mathfrak{L}^\infty$ et $L^\infty$ .....	380

*Sixième Partie*

Le théorème de Lebesgue-Nikodym. Décomposition d'une mesure.	
Formes linéaires continues sur $\mathfrak{L}^p$ .....	383
1. — Le théorème de Lebesgue-Nikodym .....	384
2. — Décomposition d'une mesure .....	387
3. — Formes linéaires continues sur les espaces $\mathfrak{L}^p$ .....	389

*Septième Partie*

Le théorème de Lebesgue-Fubini .....	392
1. — Produit de deux clans .....	392
2. — Mesure produit .....	394
3. — Théorème de Lebesgue-Fubini .....	395

*Huitième Partie*

Mesures sur la droite numérique .....	398
1. — Fonctions monotones, fonctions à variation bornée .....	399
2. — Définitions des mesures sur la droite numérique .....	403
3. — Dérivées des fonctions monotones .....	407
4. — Étude de $\int_a^x f(t)dt$ , où $f$ est intégrable .....	417
5. — Fonctions absolument continues et décomposition canonique d'une fonction monotone .....	421
6. — Primitives. Intégration par parties. Changement de va- riable .....	427
BIBLIOGRAPHIE .....	431
INDEX .....	433