

P. KRÉE

introduction
aux
mathématiques
et à leurs
applications
fondamentales

M.P. 2
maîtrise de mathématiques
appliquées fondamentales

M351

DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUE
Dirigé par le Professeur P. LELONG

INTRODUCTION AUX MATHÉMATIQUES ET A LEURS APPLICATIONS FONDAMENTALES

M. P. 2., maîtrise de M. A. F.
Ecoles d'ingénieurs

ÉDITIONS
TIER

PAR

P. KRÉE

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Nice

PRÉFACE DE

P. LELONG

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris



EDC 1807
^
^

DUNOD
PARIS
1969

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

GÉNÉRALITÉS

10. Calcul des propositions. Algèbre de Boole	2
10.1 Définitions	2
10.2 Opérations	2
10.3 Propriétés	3
10.4 Implications, équivalences	4
10.5 Théorie des circuits de commutation	4
10.6 Exemple 1 : additionneur	5
10.7 Exemple 2 : commande de machine hydraulique	8
Annexe : propositions avec quantificateurs	9
11. Notions sur les ensembles	13
11.1 Historique	13
11.2 Applications	15
11.3 Opérations. La relation d'inclusion	17
11.4 Relations binaires définies sur un ensemble	19
11.5 Relations d'équivalence	20
11.6 Relations de préordre et d'ordre	22
11.7 La méthode PERT (Program evaluation and Review Technic)	23
Annexe : Introduction à la théorie des ensembles	28
12. Les opérations algébriques	38
12.1 Les opérations	38
12.2 Propriétés possibles des opérations	41
12.3 Groupes et groupes commutatifs	42
12.4 Les anneaux et les corps	45

DEUXIÈME PARTIE

ESPACES VECTORIELS. ALGÈBRES

20. Espaces vectoriels et espaces affines. Sous-espaces	54
20.1 Définitions	54
20.2 Systèmes libres. Systèmes liés	55
20.3 Bases	56
20.4 Espace vectoriel et espace affine associé	62
20.5 Sous-espaces vectoriels. Sous-espaces affines	64

20.6	Quotient par un sous-espace vectoriel.....	68
20.7	Formes linéaires et affines. Hyperplans	69
21.	Barycentre et convexité, Programmes linéaires et théorie des jeux	75
21.1	Barycentre	75
21.2	Principe fondamental de la géométrie analytique	77
21.3	Propriétés topologiques des espaces vectoriels de dimension finie	78
21.4	Ensembles convexes et polyèdres convexes	81
21.5	Énoncés des problèmes de programmation linéaire	84
21.6	Résolution des problèmes de programmation linéaire.....	86
21.7	Généralités sur la stratégie dans les duels	90
21.8	Jeux avec un nombre fini de stratégies pures.....	94
	Annexe : fonctions convexes	98
22.	Applications linéaires et matrices	102
22.1	Introduction	102
22.2	Les transformations linéaires et leurs matrices	105
22.3	Opérations sur les matrices	106
22.4	Étude géométrique des transformations linéaires	109
22.5	Transformations linéaires inversibles. Matrices inversibles	112
22.6	Matrices de changement de base	114
22.7	Cas des espaces de dimension quelconque	118
	Annexe : la structure d'algèbre	119
23.	Déterminants, tenseurs, formes extérieures	132
23.1	Formes n -linéaires alternées sur \mathbf{R}^n : déterminants d'ordre n	132
23.2	Préliminaires	140
23.3	Formes p -linéaires sur \mathbf{R}^n ; les tenseurs du type $\binom{0}{p}$	142
23.4	Formes p -linéaires alternées sur \mathbf{R}^n ; p -formes extérieures	147
23.5	Les tenseurs du type $\binom{q}{p}$	152
24.	Décomposition de l'espace associée à un opérateur linéaire.....	167
24.1	Valeurs propres et directions propres	167
24.2	Un lemme de Gergoshin	169
24.3	Décomposition de l'espace, en somme directe, associée à un opérateur linéaire	170
24.4	Exemples d'application	173
24.5	Matrices à termes positifs	177
24.6	Application aux chaînes de Markov	179
25.	Espaces euclidiens. Formes quadratiques	185
25.1	Espaces euclidiens	185
25.2	Groupe orthogonal et matrices carrées orthogonales	188
25.3	Opérateurs symétriques d'un espace euclidien et matrices symétriques	189
25.4	Application à la réduction des formes quadratiques sur un espace euclidien.....	193
25.5	Application de la réduction des formes quadratiques	194
25.6	Espaces hermitiques. Groupe unitaire	197
25.7	Espace de la relativité restreinte	198
	Annexe : Formes quadratiques sur un espace vectoriel réel	199

TROISIÈME PARTIE

INTRODUCTION A L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

30. Propriétés topologiques de la droite	208
30.1 Définitions relatives aux nombres réels	208
30.2 Les théorèmes fondamentaux	210
30.3 Les séries à termes réels	213
30.4 Fonctions continues. Parties fermées bornées de R	216
30.5 Propriétés topologiques des espaces vectoriels réels de dimension finie... ..	219
30.6 Norme sur un espace vectoriel. Distance	221
30.7 Comportement d'une fonction au voisinage d'un point	223
30.8 Symboles O et o	224
30.9 Propriétés générales des symboles O et o	236
31. L'intégration des fonctions	236
31.1 Mesure de Lebesgue sur une partie P de R^n	236
31.2 Intégration des fonctions simples	238
31.3 Intégration des fonctions positives	239
31.4 Intégration des fonctions de signe quelconque	245
31.5 Etude de $\varphi(t) = \int f(x, t) dx$	249
31.6 Familles dénombrables sommables	251
31.7 Exemples d'application	253
Annexe : intégration des fonctions à valeurs vectorielles	255
32. Fonctions dérivables et applications	260
32.1 Applications dérivables	260
32.2 Fonctions holomorphes	266
32.3 Intégration des fonctions holomorphes	268
32.4 Systèmes différentiels linéaires	272
33. Relation entre le calcul différentiel, l'intégration et la géométrie	284
33.1 Bouts de variétés orientées de dimension p	284
33.2 Variétés à bord	286
33.3 Exemple de formule de transformation d'intégrales	290
33.4 Analyse tensorielle	293
33.6 Intégration de formes différentielles	299
33.7 La formule de Stokes	302
Annexe : coordonnées curvilignes orthogonales sur un ouvert de E_n	305
34. Suites et séries de fonctions	333
34.1 Divers modes de convergence des fonctions	333
34.2 Séries entières	336
34.3 Séries de Fourier	340

QUATRIÈME PARTIE

INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMÉRIQUE

40. Généralités sur l'analyse numérique	352
40.1 Entropie et quantité d'information	352
40.2 Nécessité de la représentation numérique des fonctions et des opérateurs	354
40.3 Généralités sur l'analyse numérique	355
40.4 L'affichage des données et des résultats	359
40.5 Les erreurs	359

41. Utilisation des ordinateurs électroniques	362
41.1 Logogramme d'un calcul	362
41.2 Principe du fonctionnement d'un ordinateur	365
41.3 Possibilités d'utilisation d'un ordinateur	366
41.4 Généralités sur les langages	367
41.5 Traduction du logogramme par le programmeur	368
41.6 Importance des logogrammes	373
42. Problèmes numériques relatifs aux suites de nombres	376
42.1 Opérateurs de convolution dans l'espace des polynômes	376
42.2 Théorème fondamental	378
42.3 Polynômes d'Appell d'un opérateur de convolution dans $\mathbb{C}[x]$	381
42.4 Applications à l'interpolation	384
42.5 Formules sommatoires d'Euler Mac Laurin	385
42.6 Application à l'évaluation des sommes $\sum_{k=1}^n f(k)$	387
43. Problèmes numériques liés aux matrices	392
43.1 Recherche des valeurs propres et des vecteurs propres	392
43.2 Résolution des systèmes linéaires	393
43.3 Application à la résolution des problèmes différentiels aux limites	402
43.4 Inversion des matrices carrées	409
44. Existence et approximation des solutions des équations non linéaires	417
44.1 Exemples de méthodes itératives	417
44.2 Généralités sur les méthodes itératives	419
44.3 La méthode des approximations successives	423
44.4 La méthode de Newton-Raphson	425
44.5 Recherche des extremums d'une fonction numérique	429
44.6 Détermination des zéros d'un polynôme	430

CINQUIÈME PARTIE

INITIATION AU CALCUL DES PROBABILITÉS
ET AUX SCIENCES STATISTIQUES

50. Initiation à la théorie des probabilités	442
50.1 Préliminaires sur les σ -algèbres de Boole	443
50.2 Hasard. Événements. Probabilités	444
50.3 Règles du calcul des probabilités	447
50.4 Probabilités conditionnelles	447
50.5 Événements indépendants	449
50.6 Variables aléatoires numériques	452
50.7 Variables aléatoires à composantes	455
50.8 Indépendance de deux variables aléatoires	458
50.9 Variables aléatoires dont la loi a une densité	461
50.10 Applications de l'indépendance	469
50.11 Les fonctions génératrices	472
50.12 Les lois de probabilités usuelles	474

51. Initiation aux sciences statistiques	490
51.1 Introduction	490
51.2 Généralités	491
51.3 Les échantillons. Les statistiques. Considérations fondamentales	493
51.4 Exemples d'application des théorèmes du calcul des probabilités aux sciences statistiques	495
51.5 Méthodes de construction des estimateurs de paramètres	497
51.6 Utilisation des estimateurs de paramètres	502
51.7 Généralités sur les tests non paramétriques	505
51.8 Construction de tests non paramétriques à l'aide d'une statistique dont on connaît la loi dans le cas où l'hypothèse (à tester) est vraie.....	507
Tables de lois de probabilités	515
Bibliographie	519
Index alphabétique	521
