

**Jacques LABELLE
Armel MERCIER**

Introduction à l'analyse réelle

MODULO

M 201/vol 3



M 201

3557 1/1



Introduction à l'analyse réelle

JACQUES LABELLE

ARMEL MERCIER

MODULO

M 201/vol 3



M 201

3557 1/1



Introduction à l'analyse réelle

JACQUES LABELLE

ARMEL MERCIER

MODULO

Table des matières

| | |
|---|------|
| AVANT-PROPOS | xiii |
| CHAPITRE 1 Le système des nombres réels | 1 |
| 1.1 INTRODUCTION | 1 |
| 1.2 PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME DES NOMBRES RÉELS | 1 |
| 1.2.1 Exercices | 9 |
| 1.3 VALEUR ABSOLUE | 9 |
| 1.3.1 Exercices | 12 |
| 1.4 INDUCTION MATHÉMATIQUE | 13 |
| 1.4.1 Exercices | 15 |
| 1.5 CONSÉQUENCES DE L'AXIOME DE COMPLÉTUDE | 17 |
| 1.5.1 Exercices | 21 |
| EXERCICES SUR LE CHAPITRE 1 | 21 |
| CHAPITRE 2 Quelques concepts topologiques | 27 |
| 2.1 INTRODUCTION | 27 |
| 2.2 INTERVALLES | 27 |
| 2.3 VOISINAGE ET ENSEMBLE OUVERT | 28 |
| 2.3.1 Exercices | 31 |
| 2.4 POINT D'ACCUMULATION ET ENSEMBLE FERMÉ | 32 |
| 2.4.1 Exercices | 35 |
| 2.5 ADHÉRENCE ET FRONTIÈRE D'UN ENSEMBLE | 36 |
| 2.5.1 Exercices | 38 |
| 2.6 THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS | 38 |
| 2.6.1 Exercices | 40 |

| | |
|--|-----------|
| 2.7 THÉORÈME D'HEINE-BOREL | 40 |
| 2.7.1 Exercices | 44 |
| EXERCICES SUR LE CHAPITRE 2 | 44 |
| CHAPITRE 3 Suites numériques | 47 |
| 3.1 INTRODUCTION | 47 |
| 3.2 LIMITE D'UNE SUITE ET SUITE BORNÉE | 48 |
| 3.2.1 Exercices | 53 |
| 3.3 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES | 54 |
| 3.3.1 Exercices | 62 |
| 3.4 SOUS-SUITES ET SUITES MONOTONES | 64 |
| 3.4.1 Exercices | 69 |
| 3.5 SUITES DE CAUCHY | 71 |
| 3.5.1 Exercices | 75 |
| 3.6 LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE | 75 |
| 3.6.1 Exercices | 77 |
| EXERCICES SUR LE CHAPITRE 3 | 78 |
| CHAPITRE 4 Limite et continuité | 83 |
| 4.1 INTRODUCTION | 83 |
| 4.2 RAPPEL SUR LA NOTION DE FONCTION | 83 |
| 4.3 LIMITE D'UNE FONCTION | 84 |
| 4.3.1 Exercices | 93 |
| 4.4 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES | 95 |
| 4.4.1 Exercices | 97 |
| 4.5 CONTINUITÉ | 98 |
| 4.5.1 Exercices | 104 |
| 4.6 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES | 105 |
| 4.6.1 Exercices | 108 |
| 4.7 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES | 109 |
| 4.7.1 Exercices | 112 |
| 4.8 CONTINUITÉ UNIFORME | 112 |
| 4.8.1 Exercices | 116 |

| | |
|---|------------|
| 4.9 FONCTIONS RÉCIPROQUES | 117 |
| 4.9.1 Exercices | 120 |
| EXERCICES SUR LE CHAPITRE 4 | 120 |
| CHAPITRE 5 Dérivation | 125 |
| 5.1 INTRODUCTION | 125 |
| 5.2 FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES OU DÉRIVABLES | 125 |
| 5.2.1 Exercices | 129 |
| 5.3 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES | 131 |
| 5.3.1 Exercices | 138 |
| 5.4 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES | 139 |
| 5.4.1 Exercices | 146 |
| 5.5 RÈGLE DE L'HÔPITAL | 147 |
| 5.5.1 Exercices | 152 |
| 5.6 FORMULE DE TAYLOR | 153 |
| 5.6.1 Exercices | 157 |
| 5.7 NOTATIONS O , o ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS | 157 |
| 5.7.1 Exercices | 166 |
| 5.8 EXTREMUMS D'UNE FONCTION | 166 |
| 5.8.1 Exercices | 171 |
| 5.9 MÉTHODE DE NEWTON | 172 |
| 5.9.1 Exercices | 176 |
| EXERCICES SUR LE CHAPITRE 5 | 178 |
| CHAPITRE 6 Intégrale de Riemann | 183 |
| 6.1 INTRODUCTION | 183 |
| 6.2 INTÉGRALE DE RIEMANN | 183 |
| 6.2.1 Exercices | 186 |
| 6.3 INTÉGRABILITÉ D'UNE FONCTION | 187 |
| 6.3.1 Exercices | 196 |
| 6.4 L'INTÉGRALE COMME LIMITE D'UNE SOMME | 197 |
| 6.4.1 Exercices | 202 |
| 6.5 LA CLASSE DES FONCTIONS INTÉGRABLES | 202 |
| 6.5.1 Exercices | 211 |

x TABLE DES MATIÈRES

6.6 THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL

6.6.1 Exercices

6.7 MÉTHODES D'INTÉGRATION

6.7.1 Exercices

6.8 THÉORÈMES DE LA MOYENNE POUR LES INTÉGRALES

6.8.1 Exercices

6.9 INTÉGRALES IMPROPRES

6.9.1 Exercices

6.10 UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE

6.10.1 Exercice

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 6

CHAPITRE 7 Séries numériques

7.1 INTRODUCTION

7.2 CONVERGENCE DES SÉRIES NUMÉRIQUES

7.2.1 Exercices

7.3 CRITÈRES DE CONVERGENCE

7.3.1 Exercices

7.4 SÉRIES ALTERNÉES ET RÉARRANGEMENT D'UNE SÉRIE

7.5 MULTIPLICATION DE SÉRIES

7.5.1 Exercices

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 7

CHAPITRE 8 Suites de fonctions

8.1 INTRODUCTION

8.2 CONVERGENCE PONCTUELLE ET UNIFORME

8.3 SUITES DE FONCTIONS CONTINUES

8.3.1 Exercices

8.4 SUITES DE FONCTIONS INTÉGRABLES

8.5 SUITES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

8.5.1 Exercices

EXERCICES SUR LE CHAPITRE 8

x TABLE DES MATIÈRES

| | | |
|--------|---|------------|
| 6.6 | THIÈME FONDAMENTAL DU CALCUL INTÉGRAL | 212 |
| 6.6.1 | Exercices | 217 |
| 6.7 | MÉTHODES D'INTÉGRATION | 218 |
| 6.7.1 | Exercices | 223 |
| 6.8 | THÉORÈMES DE LA MOYENNE POUR LES INTÉGRALES | 225 |
| 6.8.1 | Exercices | 227 |
| 6.9 | INTÉGRALES IMPROPRES | 228 |
| 6.9.1 | Exercices | 229 |
| 6.10 | UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE | 229 |
| 6.10.1 | Exercice | 233 |
| | EXERCICES SUR LE CHAPITRE 6 | 233 |
| | CHAPITRE 7 Séries numériques | 237 |
| 7.1 | INTRODUCTION | 237 |
| 7.2 | CONVERGENCE DES SÉRIES NUMÉRIQUES | 237 |
| 7.2.1 | Exercices | 244 |
| 7.3 | CRITÈRES DE CONVERGENCE | 245 |
| 7.3.1 | Exercices | 257 |
| 7.4 | SÉRIES ALTERNÉES ET RÉARRANGEMENT D'UNE SÉRIE | 259 |
| 7.5 | MULTIPLICATION DE SÉRIES | 265 |
| 7.5.1 | Exercices | 268 |
| | EXERCICES SUR LE CHAPITRE 7 | 269 |
| | CHAPITRE 8 Suites de fonctions | 273 |
| 8.1 | INTRODUCTION | 273 |
| 8.2 | CONVERGENCE PONCTUELLE ET UNIFORME | 273 |
| 8.3 | SUITES DE FONCTIONS CONTINUES | 281 |
| 8.3.1 | Exercices | 283 |
| 8.4 | SUITES DE FONCTIONS INTÉGRABLES | 283 |
| 8.5 | SUITES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES | 287 |
| 8.5.1 | Exercices | 290 |
| | EXERCICES SUR LE CHAPITRE 8 | 291 |

| | | |
|-------------------|--|------------|
| CHAPITRE 9 | Séries de fonctions | 293 |
| 9.1 | INTRODUCTION | 293 |
| 9.2 | CONVERGENCE PONCTUELLE ET UNIFORME | 293 |
| 9.3 | PROPRIÉTÉS DES SÉRIES DE FONCTIONS | 295 |
| 9.3.1 | Exercices | 299 |
| 9.4 | SÉRIES DE PUISSANCES | 300 |
| 9.5 | FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE DE PUISSANCES | 304 |
| 9.5.1 | Exercices | 308 |
| 9.6 | SÉRIES DE TAYLOR | 308 |
| 9.7 | OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES DE PUISSANCES | 316 |
| 9.7.1 | Exercices | 323 |
| | EXERCICES SUR LE CHAPITRE 9 | 324 |
| ANNEXE A | Généralités sur les ensembles | 327 |
| A.1 | RAPPELS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES | 327 |
| A.2 | QUELQUES SYMBOLES | 328 |
| A.3 | RELATIONS ET FONCTIONS | 329 |
| A.3.1 | Exercices | 332 |
| A.4 | ENSEMBLES DÉNOMBRABLES | 333 |
| A.4.1 | Exercices | 336 |
| ANNEXE B | Dérivées des fonctions | 339 |
| B.1 | RAPPELS SUR LES FONCTIONS | 339 |
| B.2 | FONCTIONS USUELLES | 339 |
| B.3 | VALEUR DE $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x$ | 341 |
| B.4 | DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE | 342 |
| B.5 | DÉRIVÉE DES FONCTIONS USUELLES | 343 |
| B.6 | MAXIMUM ET MINIMUM | 346 |
| B.7 | Exercices | 348 |
| ANNEXE C | Espaces métriques | 351 |
| C.1 | SUITES DANS LES ESPACES MÉTRIQUES | 351 |

xii TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--------------------------------|------------|
| C.2 OUVERTS ET FERMÉS | 352 |
| C.3 COMPLÉTUDE | 358 |
| C.4 COMPACTITÉ ET CONNEXITÉ | 360 |
| C.5 Exercices | 363 |
| SOLUTIONS DES EXERCICES | 367 |
| CHAPITRE 1 | 367 |
| CHAPITRE 2 | 370 |
| CHAPITRE 3 | 372 |
| CHAPITRE 4 | 376 |
| CHAPITRE 5 | 381 |
| CHAPITRE 6 | 386 |
| CHAPITRE 7 | 391 |
| CHAPITRE 8 | 394 |
| CHAPITRE 9 | 395 |
| ANNEXE A | 401 |
| ANNEXE B | 404 |
| ANNEXE C | 406 |
| BIBLIOGRAPHIE | 409 |
| INDEX | 410 |