

MATHÉMATIQUES

classes préparatoires

BCPST

1ère et 2ème années

premier cycle universitaire

PROBABILITÉS

Jean GUÉGAND

Jean-Pierre GAVINI



A

G

R

O

18506 ²/₈



M 1991T₄

MATHÉMATIQUES

classes préparatoires

BCPST

1ère et 2ème années

premier cycle universitaire

PROBABILITÉS

Jean GUÉGAND

Professeur agrégé en MP
au lycée François 1er (Fontainebleau)

Jean-Pierre GAVINI

Professeur agrégé en BCPST
au lycée François 1er (Fontainebleau)



TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 : FAMILLES SOMMABLES - RÉSUMÉ D'INTÉGRATION

A- Familles sommables	9
Application aux séries doubles	13
B- Résumé du cours d'intégration	14
1°/ Fonctions mesurables	14
2°/ Fonctions intégrables	15
3°/ Ensembles intégrables, mesurables	16
4°/ Propriétés vraies presque partout	17
5°/ Intégration des fonctions de deux variables	18
6°/ Intégration sur un ensemble mesurable	19
7°/ Propriétés des intégrales sur un domaine	20
8°/ Ensembles élémentaires	21
9°/ Théorèmes de passage à la limite	22
10°/ Intégrale fonction de sa borne supérieure	22
11°/ Changements de variables	22
12°/ Compléments	23

CHAPITRE 2 : DÉNOMBREMENT

1°/ Les principes fondamentaux du dénombrement	25
2°/ Produits cartésiens	27
3°/ Arrangements	30
4°/ Parties d'un ensemble, combinaisons	32
5°) Applications :	
A- Applications croissantes, combinaisons avec répétitions	34
B- Partitions ordonnées, anagrammes	36
C- Utilisation des séries entières, fonction génératrice	39
<i>Exercices du chapitre 2</i>	41

CHAPITRE 3 : ESPACES PROBABILISABLES ET PROBABILISÉS

1°) Tribus sur un ensemble	49
2°) Tribus boréliennes	50
3°) Probabilités, espaces probabilisés	51
4°) Probabilités sur \mathbb{R}^n	57
5°) Espaces probabilisés finis	59
6°) Le modèle de l'urne	60
7°) Espaces probabilisés dénombrables	62
8°) Événements indépendants	62
A- Cas de deux événements	62
B- Cas de plusieurs événements	64
C- Cas d'une suite d'événements	65
9°) Probabilités conditionnelles	66

<i>Exercices du chapitre 3</i>	70
CHAPITRE 4 : VARIABLES ALÉATOIRES	
1°/ Définitions, notations	76
2°/ Opérations algébriques sur les variables aléatoires	77
3°/ Probabilité image, loi de probabilité	79
4°/ Fonction de répartition d'une variable aléatoire	80
5°/ Sauts et paliers d'une fonction monotone	81
6°/ Caractérisation des fonctions de répartition	83
7°/ Composition, fonctions boréliennes	85
CHAPITRE 5 : VARIABLES ALÉATOIRES DISCRETES	
1°/ Définitions et conséquences	88
2°) Moments d'une variable aléatoire discrète	89
3°) Théorème de transfert	90
4°) Variance, écart-type	94
5°) Variables aléatoires entières positives	95
6°) Fonction génératrice d'une variable entière	97
7°) Lois discrètes classiques	
A- Loi uniforme sur $[1, n]$	102
B- Loi de Bernoulli, loi binômiale	102
C- Loi de Poisson	103
D- Loi hypergéométrique	104
E- Loi géométrique ou de Pascal	106
8°/ Autres exemples de lois	107
A- Les lois d'un schéma de Bernoulli	107
B- Temps d'attente dans le tirage sans remise	110
9°/ Résumé sur les lois discrètes usuelles	113
<i>Exercices du chapitre 5</i>	114
CHAPITRE 6 : VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ	
1°/ Densités de probabilité sur \mathbb{R}	120
2°/ Variable aléatoires à densité	122
3°/ Composition, loi de $\Phi(X)$	125
4°/ Moments d'une variable aléatoire a densité. Espérance mathématique	131
5°/ Théorème de transfert	134
6°/ Variance et écart-type d'une variable aléatoire absolument continue	136
7°/ Lois classiques	
A- Loi uniforme sur un segment	138
B- Loi exponentielle	141
C- Lois normales	144
8°/ Lois complémentaires	
A- Loi Log-normale	147
B- Loi de Pareto	148
C- Loi Gamma	150
D- Loi Bêta	152
E- Loi de Cauchy	153

F- Loi exponentielle bilatérale de Laplace	154
9°/ Résumé sur les lois continues usuelles	154
<i>Exercices du chapitre 6</i>	155

CHAPITRE 7 : GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'ESPÉRANCE

1°/ Définitions	170
2°/ Le cas des variables discrètes et à densité	174
3°/ Linéarité de l'espérance mathématique	176
4°/ Positivité de l'espérance mathématique	180
5°/ Théorème de transfert	181
6°/ Espérance d'une variable aléatoire mixte	183

CHAPITRE 8 : GÉNÉRALITÉS SUR LES COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

1°/ Couples de variables aléatoires, vecteurs aléatoires	186
2°/ Probabilité image	187
3°/ Fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires	187
4°/ Indépendance	190
A- Cas de deux variables	190
B- Cas de plusieurs variables	192

CHAPITRE 9 : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRETES

1°) Loi conjointe d'un couple de v.a.d.	193
2°) Lois marginales	194
3°) Le cas des variables indépendantes	196
4°) Lois conditionnelles	196
5°) Lois de $\phi(X, Y)$, de $X+Y$	197
6°) Espérance de $\phi(X, Y)$	200
7°) Covariance, coefficient de corrélation	203
<i>Exercices du chapitre 9</i>	207

CHAPITRE 10 : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES A DENSITÉ

1°/ Densité de probabilité sur \mathbb{R}^2	224
2°/ Couples de variables aléatoires à densité	225
3°/ Lois marginales	230
4°/ Densités conditionnelles	231
5°/ Variables aléatoires indépendantes	235
6°/ Loi de $\phi(X, Y)$	236
7°/ Lois de la somme, du produit de deux v.a.r.	240
8°/ Théorème de transfert. Espérance d'une somme	245
9°/ Covariance, coefficient de corrélation	247
10°/ Lois classiques	
A-Loi uniforme	248
B-Loi normale a deux dimensions	249

<i>Exercices du chapitre 10</i>	254
---------------------------------	-----

CHAPITRE 11 : CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

1°) Convergence en probabilité	275
2°) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	276
3°) La loi faible des grands nombres	278
4°) Complément : notion de convergence presque sûre	280

<i>Exercices du chapitre 11</i>	281
---------------------------------	-----

CHAPITRE 12 : CONVERGENCE EN LOI, APPROXIMATIONS

1°) Convergence en loi	288
2°) Convergence en loi des suites de v.a.r. discrètes	291
3°) Le théorème de la limite centrée	295
4°) Compléments sur le comportement asymptotique des chaînes de Markov	300

<i>Exercices du chapitre 12</i>	312
---------------------------------	-----

INDEX	319
--------------	-----

INDEX DES NOTATIONS	320
----------------------------	-----

Ce cours de Mathématiques s'adresse aux élèves des classes préparatoires et aux étudiants des 1ers cycles universitaires.

Il traite de la totalité des programmes de Mathématiques BCPST avec quelques compléments.

C'est aussi un ouvrage destiné à un plus large public en particulier aux biologistes qui désirent renforcer leurs connaissances en Mathématiques.

On trouve à la fin de chaque chapitre des exercices, et pour certains d'entre eux une solution est proposée.

Ce cours de Mathématiques comporte 4 tomes :

Analyse - 1

Analyse - 2

Algèbre

Probabilités



9 782729 898076

ISBN 2-7298-9807-7