

Vincent Papillon

**V**ecteurs,  
matrices et  
nombres  
complexes

MODULO

Vincent Papillon

312

M 194



# ecteurs, matrices et nombres complexes

3654

1  
✓  
1



MODULO

# TABLE DES MATIERES

<b>AVANT-PROPOS</b>	<b>IX</b>
<b>CHAPITRE 1 POINTS ET VECTEURS</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Points, vecteurs et scalaires dans les espaces euclidiens</b>	<b>2</b>
1.1.1 Quelques conventions de dessin, 2 — 1.1.2 Points, vecteurs et translations, 4 — 1.1.3 Opérations sur les vecteurs, 6 — 1.1.4 Propriétés des opérations sur les vecteurs, 10 — 1.1.5 Opération des vecteurs sur les points, 11 — Exercices 1.1, 13	
<b>1.2 Composantes des vecteurs</b>	<b>16</b>
1.2.1 Combinaison linéaire de vecteurs, 17 — 1.2.2 Dépendance et indépendance linéaires, 17 — 1.2.3 Base d'un espace, 19 — Exercices 1.2, 25	
<b>1.3 Coordonnées des points</b>	<b>26</b>
1.3.1 Repère dans un espace, 27 — 1.3.2 Opérations sur les coordonnées et composantes, 28 — 1.3.3 Repères orthonormés dans $\mathbb{R}^2$ , $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^n$ , 32 — Exercices 1.3, 34	
<b>1.4 Pour aller plus loin</b>	<b>39</b>
1.4.1 L'axiomatisation de la géométrie, 39 — 1.4.2 Espace vectoriel et espace affine, 40 — Suggestions de lecture, 42	
<b>CHAPITRE 2 LONGUEURS, DISTANCES ET ANGLES</b>	<b>43</b>
<b>2.1 Longueurs et distances</b>	<b>43</b>
2.1.1 Longueur (norme) d'un vecteur, 44 — 2.1.2 Distance entre deux points, 45 — 2.1.3 Vecteurs unitaires, 46 — 2.1.4 Lieux géométriques, 48 — Exercices 2.1, 49	
<b>2.2 Produit scalaire et calcul d'angles</b>	<b>51</b>
2.2.1 Produit scalaire de deux vecteurs, 51 — 2.2.2 La loi des cosinus et le produit scalaire, 53 — 2.2.3 L'angle entre deux vecteurs, 55 — 2.2.4 Propriétés du produit scalaire, 59 — 2.2.5 Projections orthogonales, 60 — Exercices 2.2, 63	
<b>2.3 Pour aller plus loin</b>	<b>68</b>
2.3.1 Les cinq solides de Platon, 68 — Suggestions de lecture, 72	

<b>CHAPITRE 3</b>	<b>AIRES ET VOLUMES</b>	<b>73</b>
3.1	<b>Déterminants <math>2 \times 2</math> et <math>3 \times 3</math></b>	<b>73</b>
3.1.1	Orientation dans $\mathbb{R}^2$ , 74	
3.1.2	Déterminants $2 \times 2$ , 75	
3.1.3	Orientation dans $\mathbb{R}^3$ , 84	
3.1.4	Déterminants $3 \times 3$ , 84	
3.1.5	Quelques applications des déterminants $3 \times 3$ , 93	
	Exercices 3.1, 97	
3.2	<b>Produit vectoriel et produit mixte dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>101</b>
3.2.1	Le produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , 101	
3.2.2	Propriétés du produit vectoriel, 104	
3.2.3	Le produit mixte de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ , 108	
	Exercices 3.2, 110	
3.3	<b>Pour aller plus loin</b>	<b>112</b>
3.3.1	Modèle vectoriel du dessin en perspective centrale, 112	
3.3.2	Les stéréogrammes, 117	
	<b>Tableau-résumé</b>	<b>119</b>
	Tableau comparatif de la géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ , 119	
<b>CHAPITRE 4</b>	<b>DROITES ET PLANS</b>	<b>121</b>
4.1	<b>Les droites</b>	<b>121</b>
4.1.1	Équations vectorielles et paramétriques des droites dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ , 122	
4.1.2	Équations non paramétriques des droites dans $\mathbb{R}^2$ , 126	
4.1.3	Équations non paramétriques des droites dans $\mathbb{R}^3$ , 127	
4.1.4	Distance d'un point à une droite, 129	
4.1.5	Position relative de deux droites, 131	
4.1.6	Distance entre deux droites, 133	
	Exercices 4.1, 135	
4.2	<b>Les plans</b>	<b>139</b>
4.2.1	Équations vectorielles et paramétriques des plans dans $\mathbb{R}^3$ , 140	
4.2.2	Équations non paramétriques des plans dans $\mathbb{R}^3$ , 141	
4.2.3	Vecteur normal à un plan, 142	
4.2.4	Distance d'un point à un plan, 144	
4.2.5	Position relative de deux plans dans $\mathbb{R}^3$ , 146	
4.2.6	Angle dièdre entre deux plans, 148	
	Exercices 4.2, 149	
4.3	<b>Pour aller plus loin</b>	<b>153</b>
	Questionnaire sur la perception spatiale, 153	
<b>CHAPITRE 5</b>	<b>SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES</b>	<b>157</b>
5.1	<b>Systèmes d'équations linéaires et matrices</b>	<b>158</b>
5.1.1	Définitions, 158	
5.1.2	La méthode d'élimination, 160	
5.1.3	La matrice des coefficients et la matrice augmen-	

tée d'un système, 161 — 5.1.4 Matrices *ERL*, 164 —  
 5.1.5 Matrices *l*-équivalentes, 165 — 5.1.6 L'algorithme de  
 réduction de Gauss-Jordan, 166 — 5.1.7 La méthode de réso-  
 lution de Gauss-Jordan, 169 — Exercices 5.1, 172

## 5.2 Les positions relatives de trois plans dans $\mathbb{R}^3$ 175

5.2.1 Interprétation géométrique des systèmes de trois équations  
 linéaires à trois inconnues dans  $\mathbb{R}^3$ , 175 — Exercices 5.2, 177

## 5.3 Pour aller plus loin 178

5.3.1 Qu'est-ce que la programmation linéaire ?, 178 —

5.3.2 L'unicité de la forme *ERL* d'une matrice, 181 — 5.3.3 Lo-  
 giciel de résolution des systèmes d'équations linéaires, 182

# CHAPITRE 6 LES MATRICES 183

## 6.1 Le langage matriciel 183

6.1.1 Matrices : définitions et notations, 184 — 6.1.2 Matrices  
 particulières, 186 — 6.1.3 Opérations sur les matrices, 188 —  
 6.1.4 Le produit matriciel, 190 — 6.1.5 Quelques interpréta-  
 tions du produit matriciel, 194 — Exercices 6.1, 200

## 6.2 Matrices élémentaires et matrices inversibles 203

6.2.1 Matrices élémentaires, 204 — 6.2.2 Matrices carrées  
 inversibles, 206 — Exercices 6.2, 213

## 6.3 Le déterminant d'une matrice carrée 215

6.3.1 Déterminants  $n \times n$  : définition et propriétés intrinsèques,  
 215 — 6.3.2 Propriétés des déterminants relatives aux opéra-  
 tions sur les matrices, 219 — 6.3.3 Méthode d'inversion par la  
 matrice adjointe, 222 — Exercices 6.3, 225

## 6.4 Économie et matrices : le modèle de Leontief 226

6.4.1 Un cas d'analyse intersectorielle, 227 — Exercices 6.4, 230

## 6.5 Pour aller plus loin 232

6.5.1 Étude des matrices de transition, 232 — 6.5.2 Quelques  
 démonstrations, 235

# CHAPITRE 7 TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$ 239

## 7.1 Transformations dans $\mathbb{R}^2$ 240

7.1.1 Définitions et exemples, 240 — 7.1.2 Matrices et trans-  
 formations linéaires, 244 — 7.1.3 Propriétés des transforma-  
 tions linéaires, 248 — 7.1.4 Comment trouver la matrice d'une  
 transformation linéaire, 250 — Exercices 7.1, 252

<b>7.2 Homothéties, rotations et réflexions</b>	<b>255</b>
7.2.1 Étirements et homothéties, 256 — 7.2.2 Rotations autour de l'origine, 259 — 7.2.3 Réflexions autour de droites passant par l'origine, 261 — 7.2.4 Matrices orthogonales, 264 — 7.2.5 Facteur de changement d'aire, 267 — Exercices 7.2, 269	
<b>7.3 Autres transformations linéaires</b>	<b>272</b>
7.3.1 Cisaillements, 272 — 7.3.2 Projections, 275 — Exercices 7.3, 277	
<b>7.4 Points fixes et directions invariantes</b>	<b>279</b>
7.4.1 Points fixes d'une transformation linéaire, 279 — 7.4.2 Directions invariantes d'une transformation linéaire, 280 — Exercices 7.4, 282	
<b>7.5 Pour aller plus loin</b>	<b>284</b>
7.5.1 Transformations affines dans $\mathbb{R}^2$ , 284 — 7.5.2 Rotations et réflexions dans $\mathbb{R}^3$ , 287	
<b>Tableau-résumé</b>	<b>289</b>
Transformations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ , 289	

## **CHAPITRE 8 LES NOMBRES COMPLEXES** **291**

<b>8.1 L'ensemble <math>\mathbb{C}</math> des nombres complexes</b>	<b>292</b>
8.1.1 Le produit complexe dans $\mathbb{R}^2$ , 292 — 8.1.2 Définition des nombres complexes, 297 — 8.1.3 L'arithmétique complexe, 300 — Exercices 8.1, 302	
<b>8.2 Les puissances et les racines des nombres complexes</b>	<b>304</b>
8.2.1 La notation polaire des nombres complexes, 304 — 8.2.2 La formule de Moivre, 306 — 8.2.3 Racines de nombres complexes, 307 — 8.2.4 Les équations quadratiques à coefficients complexes, 310 — Exercices 8.2, 311	
<b>8.3 Le théorème fondamental de l'algèbre</b>	<b>312</b>
8.3.1 Le théorème fondamental, 312 — 8.3.2 Polynômes à coefficients réels, 314 — Exercices 8.3, 315	
<b>8.4 Transformations affines avec les nombres complexes</b>	<b>315</b>
8.4.1 Interprétation géométrique de la multiplication et de l'addition, 316 — 8.4.2 Interprétation géométrique de la conjugaison, 318 — Exercices 8.4, 321	
<b>8.5 Pour aller plus loin</b>	<b>323</b>
8.5.1 Les formules de résolution par radicaux des équations algébriques de degrés 3 et 4, 323 — 8.5.2 Heuristique de la preuve du théorème fondamental de l'algèbre, 324 — 8.5.3 La formule d'Euler, 326 — 8.5.4 Les quaternions, 327	

<b>CHAPITRE 9</b>	<b>INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES</b>	<b>329</b>
9.1	Les entiers modulo $n$	329
9.1.1	La congruence modulo $n$ , 330	
9.1.2	L'arithmétique modulo $n$ , 331	
	— Exercices 9.1, 334	
9.2	La structure de groupe	334
9.2.1	Les axiomes de la structure de groupe, 335	
9.2.2	Les sous-groupes d'un groupe, 337	
	— Exercices 9.2, 339	
9.3	Pour aller plus loin	340
9.3.1	Suggestions de lectures, 341	
<b>CORRIGÉS</b>		<b>343</b>
<b>Chapitre 1</b>		<b>343</b>
	Exercices 1.1, 343 — Exercices 1.2, 345 — Exercices 1.3, 346	
<b>Chapitre 2</b>		<b>347</b>
	Exercices 2.1, 347 — Exercices 2.2, 348	
<b>Chapitre 3</b>		<b>350</b>
	Exercices 3.1, 350 — Exercices 3.2, 351	
<b>Chapitre 4</b>		<b>352</b>
	Exercices 4.1, 352 — Exercices 4.2, 355 — Questionnaire sur la perception spatiale, 357	
<b>Chapitre 5</b>		<b>357</b>
	Exercices 5.1, 357 — Exercices 5.2, 358	
<b>Chapitre 6</b>		<b>359</b>
	Exercices 6.1, 359 — Exercices 6.2, 360 — Exercices 6.3, 362 — Exercices 6.4, 362	
<b>Chapitre 7</b>		<b>363</b>
	Exercices 7.1, 363 — Exercices 7.2, 365 — Exercices 7.3, 370 — Exercices 7.4, 370	
<b>Chapitre 8</b>		<b>373</b>
	Exercices 8.1, 373 — Exercices 8.2, 374 — Exercices 8.3, 375 — Exercices 8.4, 376	
<b>Chapitre 9</b>		<b>377</b>
	Exercices 9.1, 377 — Exercices 9.2, 378	
<b>INDEX</b>		<b>383</b>