

Exercices de calcul différentiel

François Rideau

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

METHODES

M28

François Rideau

EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

- I
CALCUL DIFFÉRENTIEL
- II
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
- III
FORMES DIFFÉRENTIELLES
- IV
CALCUL DES VARIATIONS
- V
REPÈRE MOBILE

INT. 17.18



1310 1/2

COLLECTION  MÉTHODES

HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Table

| | |
|--|----|
| Préface | ix |
| CHAPITRE 1 CALCUL DIFFERENTIEL | 1 |
| Rappels de cours | 3 |
| 1 Espaces vectoriels normés | 5 |
| 1.1 Normes | 5 |
| 1.2 Normes équivalentes | 5 |
| 1.3 Espaces normés de dimension finie | 6 |
| 1.4 Applications linéaires continues | 6 |
| 1.5 Isomorphismes | 6 |
| 1.6 Sous-espace | 7 |
| 1.7 Espace produit | 7 |
| 1.8 Espace quotient | 7 |
| 1.9 Applications multilinéaires | 8 |
| 2 Dérivées | 8 |
| 2.1 Définitions | 8 |
| 2.2 Dérivées de fonctions particulières | 9 |
| 2.3 Dérivée d'une fonction composée | 10 |
| 2.4 Dérivée d'une fonction à valeurs dans un espace produit | 10 |
| 2.5 Dérivée d'une fonction définie sur un ouvert d'un espace produit | 10 |
| 2.6 Cas particulier | 11 |
| 2.7 Dérivées successives | 12 |
| 2.8 Exemples | 13 |
| 3 Fonctions dérivables réelles | 14 |
| 3.1 Théorèmes des accroissements finis | 14 |
| 3.2 Théorème de Schwartz | 14 |
| 3.3 Relation entre dérivabilité partielle et dérivabilité | 14 |
| 3.4 Limites de fonctions dérivables | 15 |
| 3.5 Formule de Taylor avec reste de Lagrange | 15 |
| 3.6 Formule de Taylor en développement limité | 15 |
| 4 Intégration des fonctions réglées | 16 |
| 4.1 Définitions | 16 |
| 4.2 Caractérisation des fonctions réglées | 16 |
| 4.3 Exemples | 16 |
| 4.4 Intégrale d'une fonction réglée | 16 |
| 4.5 Propriétés de l'intégrale | 17 |
| 4.6 Différentiation sous le signe d'intégration | 18 |

| | |
|---|---------|
| 4.7 Formule de Taylor avec reste intégral | 18 |
| 5 Problèmes d'extréma | 19 |
| 5.1 Maxima et minima relatifs | 19 |
| 5.2 Extréma liés | 20 |
| 5.2.1 Condition nécessaire du premier ordre | 20 |
| 5.2.2 La hessienne | 20 |
| 5.3 Condition nécessaire du deuxième ordre | 20 |
| 5.4 Condition suffisante du deuxième ordre | 21 |
| 5.5 Théorie de Morse | 21 |
| 6 Sous variétés d'un espace de Banach | 22 |
| 6.1 Difféomorphismes | 22 |
| 6.2 Etalements | 22 |
| 6.3 Le théorème d'inversion locale | 22 |
| 6.4 Somme directe et facteur direct topologiques | 23 |
| 6.5 Monomorphismes linéaires | 23 |
| 6.6 Immersions | 24 |
| 6.7 Epimorphismes linéaires | 24 |
| 6.8 Submersions | 25 |
| 6.9 Sous-variétés | 25 |
| 6.10 Paramétrisation | 26 |
| 6.11 L'espace vectoriel tangent | 26 |
| 6.12 Le graphe d'une fonction dérivable | 27 |
| 6.13 L'image réciproque d'un point par une submersion | 27 |
| 6.14 Le théorème des fonctions implicites | 27 |
| 6.15 Subimmersions | 28 |
| 6.16 Images directes et inverses d'une subimmersion | 28 |
| 6.17 Rang d'une application dérivable | 28 |
| 6.18 Théorème du rang constant | 28 |
| Enoncé des exercices du chapitre 1 | 30 |
| Solution des exercices du chapitre 1 | 73 |
| CHAPITRE 2 EQUATIONS DIFFERENTIELLES | 215 |
| Rappels de cours | 216 |
| 1 Equations différentielles | 217 |
| 1.1 Equations différentielles du premier ordre | 217 |
| 1.2 Equations différentielles d'ordre n | 218 |
| 2 Théorème de Cauchy-Lipschitz | 218 |
| 2.1 Enoncé | 218 |
| 2.2 Corollaire fondamental | 219 |
| 2.3 Solutions ε -approchées | 219 |
| 2.4 Solutions maximales | 220 |
| 3 Dérivabilité des solutions | 220 |
| 4 Equations autonomes | 220 |
| 4.1 Définition | 220 |

TABLE

| | |
|--|---------|
| 4.2 Flot local | 221 |
| 4.3 Flot global | 221 |
| 4.4 Groupe local à un paramètre | 222 |
| 5 Equations différentielles linéaires | 222 |
| 5.1 Définitions | 222 |
| 5.2 Théorème d'existence | 222 |
| 5.3 Résolvante | 223 |
| 5.4 Cas particuliers | 223 |
| 6 Intégrales premières | 224 |
| 6.1 Définitions | 224 |
| 6.2 Equations aux dérivées partielles linéaire homogène | 225 |
| 6.3 Equations aux dérivées partielles linéaires, non homogènes | 226 |
| Enoncé des exercices du chapitre 2 | 227 |
| Solution des exercices du chapitre 2 | 242 |
| CHAPITRE 3 FORMES DIFFERENTIELLES | 283 |
| Rappels de cours | 284 |
| 1 Rappels d'algèbre linéaire | 285 |
| 1.1 Applications multilinéaires alternées | 285 |
| 1.2 Groupe de permutations | 285 |
| 1.3 Applications multilinéaires antisymétriques | 286 |
| 1.4 Produit extérieur d'applications multilinéaires | 286 |
| 1.5 Propriétés du produit extérieur | 286 |
| 1.7 Cas de la dimension finie | 287 |
| 1.6 Algèbre des formes extérieures | 287 |
| 2 Formes différentielles | 287 |
| 2.1 Définition | 287 |
| 2.2 Produit extérieur de formes différentielles | 288 |
| 3 La différentiation extérieure | 289 |
| 3.1 Différentielle extérieure | 289 |
| 3.2 Propriétés de la différentiation extérieure | 289 |
| 3.3 Transposition | 289 |
| 3.4 Formes différentielles \mathbb{R}^k | 290 |
| 3.5 Exemples | 291 |
| 3.6 Théorème de Poincaré | 291 |
| 3.7 Formule de Stokes | 291 |
| 4 Théorème de Frobenius | 292 |
| 4.1 Position du problème | 292 |
| 4.2 Théorème fondamental | 292 |
| 4.3 Interprétation en termes de formes différentielles | 292 |
| 4.4 Cas de la dimension finie | 293 |
| Enoncé des exercices du chapitre 3 | 295 |
| Solution des exercices du chapitre 3 | 312 |

TABLE

| | |
|---|-----|
| CHAPITRE 4 CALCUL DES VARIATIONS | 363 |
| Rappels de cours | 364 |
| 1 Position du problème | 365 |
| 1.1 Notations | 365 |
| 1.2 Un problème d'extremum | 366 |
| 1.3 Equation d'Euler | 366 |
| 2 Problèmes d'extremum pour des courbes assujetties à rester sur une variété | 366 |
| 2.1 Cas général | 366 |
| 2.2 Problèmes à deux dimensions | 368 |
| Enoncé des exercices du chapitre 4 | 370 |
| Solution des exercices du chapitre 4 | 378 |
| CHAPITRE 5 REPERE MOBILE | 405 |
| Rappels de cours | 407 |
| 1 Repères affines | 407 |
| 2 Repères orthonormés | 408 |
| 3 Le ruban des repères de Frénet | 409 |
| 4 Le ruban des repères de Darboux | 412 |
| 5 Surfaces riemaniennes orientées | 414 |
| 6 Surface plongée dans E | 416 |
| 7 La forme interne ω_{12} | 418 |
| 8 Les formes externes ω_{13} et ω_{23} | 420 |
| 9 Les deux formes quadratiques fondamentales | 421 |
| Enoncé des exercices du chapitre 5 | 425 |
| Solution des exercices du chapitre 5 | 433 |
| Bibliographie | 465 |
| Index terminologique | 467 |

F. RIDEAU

EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Cet ouvrage, d'un niveau élémentaire, couvre le programme de calcul différentiel de la maîtrise de mathématiques. Il s'adresse également aux étudiants préparant le Capes et l'agrégation. Il intéressera tous ceux qui entendent se spécialiser ensuite en géométrie différentielle.

Les exercices suivent la division en chapitres du livre d'Henri Cartan, de la même collection, *Cours de calcul différentiel*. Ils couvrent : calcul différentiel ; équations différentielles ; formes différentielles ; calcul des variations ; repère mobile.

Chaque chapitre est précédé d'un rappel de cours.

ISBN 2 7056 5862 5 164 F



9 782705 658625

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS