
manuel de
mathématiques

MATHÉMATIQUES
SUPÉRIEURES
ANALYSE

Jacques MOISAN
Françoise CHANET
Frédérique DELMAS
Nicolas TOSEL



M 172

MANUEL DE MATHÉMATIQUES

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES ANALYSE

NR 263

Cours / Travaux dirigés / Exercices corrigés

Jacques MOISAN

ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur de Mathématiques en Mathématiques Spéciales M
au lycée Descartes de Tours

Françoise CHANET

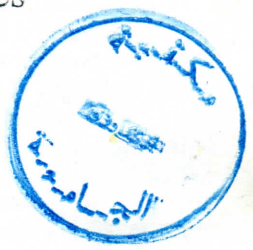
ancienne élève de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles
Professeur de Mathématiques en Mathématiques Spéciales M
au lycée Descartes de Tours

Frédérique DELMAS

ancienne élève de l'École Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses
Professeur de Mathématiques en Mathématiques Supérieures
au lycée Descartes de Tours

Nicolas TOSEL

ancien élève de l'École Normale Supérieure de Saint-Cloud
Professeur de Mathématiques en Mathématiques Supérieures
au lycée Descartes de Tours



IBC

882

1/1



Table des matières

I. LA DROITE NUMÉRIQUE..... 9

| | |
|---|----|
| A) Principales propriétés de \mathbb{R} | 9 |
| 1- Introduction de \mathbb{R} | 9 |
| 2- Suites réelles..... | 12 |
| 3- Approximation décimale d'un réel..... | 15 |
| 3- Racines n èmes dans \mathbb{R} | 18 |
| B) Topologie de \mathbb{R} , intervalles, voisinages..... | 21 |
| 1- Voisinages dans \mathbb{R} | 21 |
| 2- Ouverts et fermés de \mathbb{R} | 23 |
| 3- Compacité..... | 25 |
| 4- Droite numérique achevée \mathbb{R}_f | 27 |
| C) Suites réelles..... | 29 |
| 1- Limites de suites..... | 29 |
| 2- Suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$ | 30 |
| 3- Suites monotones réelles..... | 31 |
| 4- Extension de la notion de convergence aux suites complexes..... | 32 |
| D) Limites de fonctions et continuité..... | 34 |
| 1- Limites de fonctions réelles de variable réelle..... | 34 |
| 2- Fonctions monotones..... | 38 |
| 3- Continuité..... | 41 |
| 4- Uniforme continuité..... | 44 |
| 5- Approximation uniforme..... | 45 |

TRAVAUX DIRIGÉS..... 51

| | |
|--|----|
| 1- Sous-groupes additifs de \mathbb{R} | 51 |
| 2- Moyennes de Cesaro et de Toeplitz..... | 54 |
| 3- Etude d'une suite récurrente..... | 58 |
| 4- Valeurs d'adhérence d'une suite bornée..... | 59 |
| 5- Equations fonctionnelles usuelles..... | 63 |

EXERCICES..... 66

| | |
|------------------------------------|----|
| A) Inégalités..... | 66 |
| B) Topologie de \mathbb{R} | 68 |
| C) Suites réelles..... | 69 |
| D) Limites et continuité..... | 71 |

SOLUTION DES EXERCICES..... 73

| | |
|------------------------------------|----|
| A) Inégalités..... | 73 |
| B) Topologie de \mathbb{R} | 76 |
| C) Suites réelles..... | 80 |
| D) Limites et continuité..... | 84 |

II. FONCTIONS RÉELLES OU COMPLEXES D'UNE VARIABLE RÉELLE..... 91

| | |
|---|----|
| A) Fonctions continues sur un intervalle..... | 91 |
| 1- Théorème des valeurs intermédiaires..... | 91 |
| 2- Monotonie et continuité..... | 92 |
| 3- Homéomorphisme d'intervalles..... | 94 |
| 4- Limites dans \mathbb{C} | 95 |

| | |
|--|-----|
| B) Fonctions dérivables, dérivées d'ordre supérieur..... | 98 |
| 1- Dérivation..... | 98 |
| 2- Propriétés..... | 100 |
| 3- Dérivées successives..... | 103 |
| C) Accroissements finis..... | 106 |
| 1- Extrémum local d'une fonction dérivable..... | 106 |
| 2- Théorème de Rolle..... | 106 |
| 3- Egalité des accroissements finis..... | 107 |
| 4- Caractérisation des fonctions monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables..... | 109 |
| 5- Dérivabilité en une borne de l'intervalle..... | 111 |
| D) Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques..... | 112 |
| 1- Fonctions circulaires réciproques..... | 112 |
| 2- Fonctions hyperboliques directes..... | 116 |
| 3- Fonctions hyperboliques réciproques..... | 118 |
| 4- Tableau des dérivées des fonctions usuelles..... | 120 |
| E) Fonctions convexes..... | 121 |
| 1- Partie convexe de \mathbb{R}^n | 121 |
| 2- Fonctions convexes..... | 121 |
| 3- Convexité et dérivabilité..... | 124 |

| | |
|---|------------|
| TRAVAUX DIRIGES..... | 127 |
| 1- Egalité de Taylor-Lagrange..... | 127 |
| 2- Polynômes d'Hermite..... | 130 |
| 3- Caractérisation des fonctions polynômes..... | 131 |
| 4- Inégalité de Bernstein pour les polynômes trigonométriques réels..... | 133 |
| 5- Inégalités de convexité..... | 135 |

| | |
|--------------------------------------|------------|
| EXERCICES..... | 138 |
| A) Continuité sur un intervalle..... | 138 |
| B) Accroissements finis..... | 138 |
| C) Dérivées successives..... | 139 |
| D) Fonctions usuelles..... | 141 |
| E) Convexité..... | 142 |

| | |
|--------------------------------------|------------|
| SOLUTIONS DES EXERCICES..... | 144 |
| A) Continuité sur un intervalle..... | 144 |
| B) Accroissements finis..... | 146 |
| C) Dérivées successives..... | 148 |
| D) Fonctions usuelles..... | 153 |
| E) Convexité..... | 157 |

III. INTÉGRALES ET PRIMITIVES..... 161

| | |
|--|-----|
| A) Construction et propriétés de l'intégrale..... | 161 |
| 1- L'intégrale des fonctions en escalier..... | 161 |
| 2- L'intégrale des fonctions continues par morceaux..... | 163 |
| 3- Sommes de Riemann..... | 166 |
| 4- Extension aux fonctions à valeur dans \mathbb{C} | 168 |
| B) Intégrale fonction de la borne supérieure..... | 170 |
| 1- Théorème fondamental et corollaires..... | 170 |
| 2- Changement de variable..... | 171 |
| 3- L'intégration par parties..... | 171 |
| C) Calcul des primitives..... | 172 |
| 1- Généralités..... | 172 |
| 2- Techniques de base..... | 172 |
| 3- Tableau des primitives des principales fonctions usuelles..... | 174 |

| | |
|---|-----|
| 4- Calcul de primitives de fractions rationnelles | 175 |
| 5- Calcul de primitives de fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles..... | 176 |
| D) Les formules de Taylor..... | 179 |
| 1- L'égalité de Taylor avec reste intégral..... | 179 |
| 2- L'inégalité de Taylor-Lagrange | 179 |
| 3- La formule de Taylor-Young | 180 |
| 4- Remarque sur les formules de Taylor..... | 180 |
| E) Calcul approché des intégrales..... | 181 |
| 1- La méthode des rectangles au point médian..... | 181 |
| 2- La méthode des trapèzes..... | 183 |

TRAVAUX DIRIGÉS 187

| | |
|--|-----|
| 1- Autour du lemme de Riemann-Lebesgue | 187 |
| 2- Une suite d'intégrales et quelques applications arithmétiques..... | 189 |
| 3- L'inégalité de Hölder | 192 |
| 4- Etude d'un problème variationnel..... | 193 |
| 5- Intégrale de Wallis et applications | 196 |
| 6- Degré d'approximation des sommes de Riemann | 199 |
| 7- Caractérisation variationnelle des splines cubiques | 201 |

EXERCICES 203

| | |
|---|-----|
| A) Calculs d'intégrales | 203 |
| B) Inégalités sur les intégrales | 204 |
| C) Etudes de suites..... | 206 |
| D) Fonctions définies par des intégrales..... | 208 |
| E) Exercices divers | 210 |

SOLUTION DES EXERCICES 213

| | |
|---|-----|
| A) Calcul d'intégrales..... | 213 |
| B) Inégalités sur les intégrales | 218 |
| C) Etude de suites | 223 |
| D) Fonctions définies par des intégrales..... | 231 |
| E) Exercices divers | 237 |

IV. ÉTUDE LOCALE DES FONCTIONS 243

| | |
|--|-----|
| A) Comparaison au voisinage..... | 243 |
| 1- Prépondérance | 243 |
| 2- Équivalence..... | 245 |
| 3- Intégration des relations de comparaison | 247 |
| B) Développements limités, formule de Taylor-Young | 248 |
| 1- Définitions..... | 248 |
| 2- Fonctions admettant un développement limité | 250 |
| 3- Primitivation et dérivation..... | 252 |
| 4- Opérations sur les développements limités..... | 253 |
| 5- Développement limité des fonctions usuelles..... | 256 |
| C) Étude pratique des suites..... | 257 |
| 1- Étude asymptotique de suites..... | 257 |
| 2- Suites récurrentes..... | 259 |
| D) Fonctions et équations numériques..... | 261 |
| 1- Utilisation des développements limités..... | 261 |
| 2- Équations numériques $f(x) = 0$ | 263 |
| 3- Méthodes itératives des équations..... | 266 |

| | |
|---|-----|
| TRAVAUX DIRIGÉS | 270 |
| 1- Division par $(x-a)$ | 270 |
| 2- Développement limité de la fonction tangente | 271 |
| 3- Développement limité d'une application réciproque | 273 |
| 4- Contre-exemple au théorème d'intégration des équivalents..... | 275 |
| 5- Accélération de convergence d'une suite: méthodes de Aïtken | 277 |
| 6- Calcul de π par la méthode d'Archimède | 279 |
| EXERCICES | 282 |
| A) Équivalents et développements limités..... | 282 |
| B) Études de suites..... | 283 |
| C) Fonctions et équations..... | 286 |
| SOLUTIONS DES EXERCICES | 287 |
| A) Equivalents et développements limités..... | 287 |
| B) Étude de suites | 295 |
| C) Fonctions et équations..... | 310 |
| INDEX | 319 |