

cours et exercices de  
mathématiques

classes préparatoires  
1<sup>ers</sup> cycles universitaires

Tome 2

ANALYSE

PIERRE VIGOUREUX

ellipses

M166/Te

# Cours et exercices de Mathématiques

Tome 2  
Analyse

Classes préparatoires  
1<sup>ers</sup> cycles universitaires

**Pierre Vigoureux**

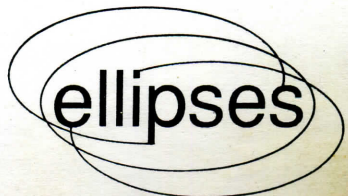
Agrégé de Mathématiques  
Professeur en classe de Mathématiques Spéciales TS

avec la participation de  
Annik Rainsard

4722  $\frac{2}{3}$

N° de C.Ate: .....

N° d'inventaire: .....



# TABLE DES MATIERES

<b>1</b>	<b>Suites numériques</b> .....	<b>9</b>
1	Suites réelles ou complexes.....	9
1.1	Définitions.....	9
1.2	Algèbre des suites.....	10
1.3	Relations de comparaison.....	10
2	Convergence d'une suite.....	11
2.1	Suites convergentes, suites divergentes.....	11
2.2	Convergence et relation de comparaison.....	12
2.3	Convergence et structure d'algèbre.....	13
3	Convergence et relation d'ordre.....	13
3.1	Théorèmes de comparaison.....	14
3.2	Suites monotones.....	14
4	Etude de quelques suites particulières.....	15
4.1	Suites arithmétiques.....	15
4.2	Suites géométriques.....	15
4.3	Suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n + b$ .....	16
4.4	Suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ .....	16
4.5	Suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ .....	17
4.6	Petit formulaire.....	18
	QUESTIONS DE COURS.....	18
	EXERCICES.....	19
	INDICATIONS ET CORRIGES.....	23
<b>2</b>	<b>Limites et continuité</b> .....	<b>45</b>
	<b>Limites</b> .....	<b>45</b>
1	Algèbre des applications.....	45
1.1	Vocabulaire.....	46
1.2	Voisinages.....	46
1.3	Relations de comparaison.....	46
2	Limites.....	48
2.1	Limites, limites à droite, limites à gauche.....	48
2.2	Limites et relation de comparaison.....	49
2.3	Limites et structure d'algèbre.....	50
3	Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ .....	51
3.1	Limites et relation d'ordre.....	51
3.2	Limites des fonctions monotones.....	51
	<b>Continuité</b> .....	<b>52</b>
1	Continuité en un point.....	52
1.1	Continuité, continuité à droite, continuité à gauche.....	52
1.2	Prolongement par continuité.....	53
1.3	Continuité et structure d'algèbre.....	54
2	Continuité sur un intervalle.....	54

3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ .....	55
3.1 Théorème des valeurs intermédiaires .....	55
3.2 Fonctions monotones .....	55
QUESTIONS DE COURS .....	56
EXERCICES .....	56
INDICATIONS ET CORRIGES .....	61
<b>3 Dérivabilité</b> .....	<b>87</b>
1 Dérivabilité en un point .....	87
1.1 Dérivabilité en un point .....	87
1.2 Différentielle .....	87
2 Dérivabilité sur un intervalle .....	88
2.1 Application dérivée .....	88
2.2 Algèbre des applications dérivables .....	88
2.3 Dérivée des fonctions usuelles .....	89
2.4 Dérivées successives .....	90
3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ .....	91
3.1 Tangentes, demi-tangentes .....	91
3.2 Fonctions monotones .....	91
3.3 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis .....	91
3.4 Théorème de Taylor .....	93
3.5 Formule de Taylor Young, développements limités .....	93
3.6 Fonctions convexes .....	97
4 Compléments : fonctions circulaires réciproques .....	98
4.1 Fonction arctangente .....	98
4.2 Fonction arcsinus .....	99
4.3 Fonction arccosinus .....	100
QUESTIONS DE COURS .....	101
EXERCICES .....	102
INDICATIONS ET CORRIGES .....	106
<b>4 Intégration</b> .....	<b>135</b>
1 Primitives .....	135
1.1 Définition : primitive .....	135
1.2 Primitives de fonctions usuelles .....	135
2 Intégrale d'une fonction continue .....	136
2.1 Intégrale d'une fonction continue .....	136
2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux .....	137
2.3 Propriétés .....	137
2.4 Intégrations par parties .....	138
2.5 Changement de variable .....	139
2.6 Théorème de Taylor avec reste intégral .....	139
3 Valeurs approchées d'intégrales .....	140
3.1 Méthode des rectangles .....	140
3.2 Méthode des trapèzes .....	140
4 Intégrales impropres .....	141
4.1 Convergence des intégrales .....	141
4.2 Fonctions de référence .....	143
4.3 Cas des fonctions positives .....	143
4.4 Convergence absolue .....	144
5 Intégrales dépendant d'un paramètre .....	144
QUESTIONS DE COURS .....	145
EXERCICES .....	146
INDICATIONS ET CORRIGES .....	151

<b>5</b>	<b>Séries</b> .....	<b>183</b>
	1 Séries numériques.....	183
	1.1 Définitions.....	183
	1.2 Séries réelles à termes positifs.....	184
	1.3 Convergence absolue.....	186
	2 Suites et séries de fonctions.....	186
	2.1 Norme uniforme.....	186
	2.2 Suites de fonctions.....	187
	2.3 Séries de fonctions.....	188
	2.4 Limite uniforme.....	189
	3 Séries entières.....	191
	3.1 Rayon de convergence.....	191
	3.2 Séries entières de la variable réelle.....	192
	3.3 Développement en série entière.....	193
	4 Séries de Fourier.....	194
	4.1 Séries trigonométriques.....	194
	4.2 Convergence des séries trigonométriques.....	195
	4.3 Propriété de la somme des séries trigonométriques.....	196
	4.4 Séries de Fourier.....	197
	QUESTIONS DE COURS.....	198
	EXERCICES.....	199
	INDICATIONS ET CORRIGES.....	205
<b>6</b>	<b>Equations différentielles</b> .....	<b>233</b>
	1 Equations différentielles linéaires du premier ordre.....	233
	1.1 Généralités.....	233
	1.2 Résolution de l'équation homogène $y' + a y = 0$ .....	233
	1.3 Résolution de l'équation $y' + a y = b$ .....	234
	1.4 Problème de Cauchy.....	235
	1.5 Equations à coefficients constants.....	235
	2 Equations différentielles linéaires du second ordre.....	235
	2.1 Généralités.....	235
	2.2 Plan vectoriel des solutions de l'équation homogène : $y'' + a y' + by = 0$ .....	236
	2.3 Résolution de l'équation $y'' + a y' + by = c$ .....	236
	2.4 Problème de Cauchy.....	238
	2.5 Equations à coefficients constants.....	239
	3 Compléments.....	240
	3.1 Equation différentielle du premier ordre $U(x, y, y') = 0$ .....	240
	3.2 Equations à variables séparables.....	241
	3.3 Intégration d'une forme différentielle exacte.....	242
	QUESTIONS DE COURS.....	242
	EXERCICES.....	242
	INDICATIONS ET CORRIGES.....	245
	<b>Index alphabétique</b> .....	<b>265</b>
	<b>Index thématique des exercices</b> .....	<b>266</b>
	<b>Annexe</b> .....	<b>269</b>