



cours et exercices de
mathématiques

ellipses

Tome 1

ALGÈBRE

PIERRE VIGOUREUX

classes préparatoires

1^{ers} cycles universitaires

M 166 / T₁

Cours et exercices de Mathématiques

Tome 1
Algèbre

18420 ³/₂₀



Classes préparatoires
1^{ers} cycles universitaires

Pierre Vigoureux

Agrégé de Mathématiques
Professeur en classe de Mathématiques Spéciales TS

avec la participation de
Annik Rainsard

ellipses

TABLE DES MATIERES

1	Structures algébriques	7
	Introduction	7
	1 Relations.....	7
	1.1 Définitions.....	7
	1.2 Relations d'équivalence.....	7
	1.3 Relations d'ordre.....	7
	2 Applications.....	8
	2.1 Définitions.....	8
	2.2 Composition des applications.....	9
	3 Lois de composition.....	10
	3.1 Lois de composition internes.....	10
	3.2 Lois de composition externes.....	10
	4 Ensembles finis, ensembles dénombrables.....	10
	4.1 Ensembles des entiers naturels.....	10
	4.2 Ensembles équipotents.....	11
	4.3 Ensembles finis.....	11
	4.4 Ensembles dénombrables.....	12
	Structures algébriques	13
	1 Groupes.....	13
	1.1 Définition.....	13
	1.2 Sous-groupes.....	13
	1.3 Morphismes.....	14
	1.4 Groupe symétrique.....	14
	2 Anneaux, corps.....	14
	2.1 Anneaux.....	14
	2.2 Sous-anneaux.....	15
	2.3 Morphismes.....	15
	2.4 Formule du binôme de Newton.....	16
	3 Espaces vectoriels, algèbres.....	16
	3.1 Espaces vectoriels.....	16
	3.2 Algèbres.....	16
	3.3 Sous-espaces vectoriels, sous-algèbres.....	17
	3.4 Morphismes.....	17
	QUESTIONS DE COURS.....	17
	EXERCICES.....	18
	INDICATIONS ET CORRIGES.....	21
2	Nombres réels, nombres complexes	38
	1 Corps des nombres réels.....	38
	1.1 Propriétés.....	38
	1.2 Partie entière.....	38
	1.3 Valeur absolue.....	38
	2 Corps des nombres complexes.....	39
	2.1 Introduction.....	39
	2.2 Partie réelle, partie imaginaire.....	39
	2.3 Module et argument.....	40
	2.4 Interprétation géométrique.....	41

2.5 Racines n ^e	42
2.6 Equation du second degré	43
QUESTIONS DE COURS.....	43
EXERCICES.....	44
INDICATIONS ET CORRIGES.....	48

3 Espaces vectoriels.....	73
1 Espaces vectoriels.....	73
1.1 Définitions.....	73
1.2 Deux exemples fondamentaux	74
2 Sous-espaces vectoriels	74
2.1 Sous-espaces vectoriels.....	74
2.2 Espace vectoriel engendré	75
2.3 Somme d'espaces vectoriels.....	75
3 Applications linéaires.....	76
3.1 Définitions, vocabulaire.....	76
3.2 Image, noyau.....	76
3.3 Projections, symétries.....	77
4 Système libre, système générateur.....	77
4.1 Système lié, système libre	77
4.2 Système générateur.....	78
4.3 Bases.....	79
4.4 Applications linéaires.....	79
QUESTIONS DE COURS.....	80
EXERCICES.....	81
INDICATIONS ET CORRIGES.....	85
4 Espaces vectoriels de dimension finie.....	106
1 Espaces vectoriels de dimension finie	106
1.1 Existence de bases.....	106
1.2 Dimension	106
2 Sous-espaces vectoriels	107
2.1 Rang d'un système de vecteurs	107
2.2 Somme directe, somme	107
3 Applications linéaires.....	108
3.1 Espaces vectoriels d'applications linéaires.....	108
3.2 Rang d'une application linéaire	109
QUESTIONS DE COURS.....	111
EXERCICES.....	111
INDICATIONS ET CORRIGES.....	114
5 Matrices.....	131
1 Matrices	131
1.1 Définitions.....	131
1.2 Matrice d'une application linéaire.....	132
1.3 Matrice d'un système de vecteurs.....	133
1.4 Rang.....	133
2 Opérations sur les matrices.....	134
2.1 Somme, produit externe par un scalaire.....	134
2.2 Multiplication.....	134
2.3 Cas des matrices carrées	135
3 Transposition	136
4 Matrices équivalentes	136
4.1 Matrice d'une application linéaire.....	136
4.2 Matrice de passage.....	137

4.3 Matrices équivalentes.....	138
4.4 Matrices semblables.....	139
QUESTIONS DE COURS.....	140
EXERCICES.....	141
INDICATIONS ET CORRIGES.....	146
6 Systèmes linéaires.....	169
1 Systèmes linéaires.....	169
1.1 Définitions.....	169
1.2 Ecriture matricielle.....	169
1.3 Ecriture vectorielle.....	170
1.4 Système de Cramer.....	170
2 Méthode du pivot de Gauss.....	171
2.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.....	171
2.2 Résolution de systèmes linéaires.....	172
2.3 Calcul de l'inverse d'une matrice.....	173
2.4 Calcul du rang d'une matrice.....	173
EXERCICES.....	174
INDICATIONS ET CORRIGES.....	177
7 Polynômes et fractions rationnelles.....	193
Polynômes.....	193
1 Polynômes.....	193
1.1 Algèbre $\mathbb{K}[X]$	193
1.2 Degré, valuation.....	194
1.3 Espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$	194
2 Divisibilité.....	195
2.1 Définitions.....	195
2.2 Division euclidienne.....	195
3 Fonctions polynomiales.....	196
3.1 Racines, multiplicité.....	196
3.2 Dérivation.....	197
4 Algèbres $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$	197
Fractions rationnelles.....	198
1 Algèbre $\mathbb{K}(X)$	198
1.1 Définitions.....	198
1.2 Degré.....	199
1.3 Fonctions rationnelles.....	199
2 Décomposition en éléments simples.....	200
2.1 Partie entière d'une fraction rationnelle.....	200
2.2 Partie principale d'une fraction rationnelle.....	200
2.3 Décomposition des fractions rationnelles complexes ou réelles.....	201
QUESTIONS DE COURS.....	202
EXERCICES.....	203
INDICATIONS ET CORRIGES.....	208
Index alphabétique.....	237
Index thématique des exercices.....	238