

pierre samuel

géométrie projective



puf

MATHÉMATIQUES

M 160

MATHÉMATIQUES

*Géométrie
projective*



PIERRE SAMUEL

Professeur à l'Université de Paris-Sud (Orsay)

IDE 847 $\frac{1}{1}$



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

SOMMAIRE



INTRODUCTION.....	9
CHAPITRE PREMIER / <i>Espaces projectifs</i>	13
§ A / Définition. Repères projectifs.....	13
Coordonnées homogènes.....	15
Dénombrements sur un corps fini.....	17
§ B / Applications projectives, homographies, groupe projectif.....	18
§ C / Espaces projectifs et espaces affines.....	20
Rappel sur les espaces affines.....	20
Exemple d'espace affine : le complémentaire d'un hyperplan d'un espace projectif.....	22
Plongements d'un espace affine dans un espace projectif.....	23
Coordonnées affines et coordonnées homogènes.....	23
Intersection avec une droite, points simples et points multiples des hypersurfaces.....	26
Trois théorèmes importants.....	29
§ D / Présentation axiomatique des plans projectif et affine.....	35
Axiomes d'incidence : cas projectif.....	35
Axiomes d'incidence : cas affine.....	37
Le théorème fondamental.....	38
Vecteurs et translations.....	41
Le corps des homothéties.....	42
Commentaires sur l'axiome de Desargues.....	46
§ E / Espaces projectifs d'hyperplans, dualité.....	49
Systèmes linéaires d'hyperplans.....	49
Dualité.....	51

§ F / L'espace projectif des cercles.	52
Coordonnées affines et homogènes.	52
Inversions.	54
Orthogonalité.	55
Faisceaux et réseaux de cercles.	56
§ G / L'espace projectif des coniques.	60
Irréductibilité.	60
Intersection de deux coniques.	61
Systèmes linéaires de coniques.	62
§ H / Espaces projectifs de diviseurs en géométrie algébrique.	68
CHAPITRE II / <i>Géométrie projective de dimension 1</i>	70
§ A / Abscisse projective, birapport, applications rationnelles.	70
Abscisse projective.	70
Birapport de quatre points.	71
Applications rationnelles.	72
§ B / Birapports et permutations.	74
§ C / Division harmonique.	76
Construction du quatrième harmonique.	76
§ D / Homographies et involutions sur une droite projective.	79
Détermination, points doubles, formes réduites.	79
Involutions et diviseurs de degré 2.	81
Homographies et involutions sur un faisceau linéaire de droites.	82
§ E / Structure de droite projective sur une conique.	84
Représentations paramétriques d'une conique.	85
Homographies et involutions : Frégier, Pascal.	87
§ F / Courbes unicursales.	90
Exemples.	91
Représentations propres, th. de Lüroth.	92
Caractérisation des cubiques unicursales.	93
Un peu de géométrie sur une cubique unicursale.	96
§ G / Droite projective complexe. Groupe circulaire.	102
Projection stéréographique.	102
Exemples d'homographies et d'anti-homographies.	103
Théorème fondamental, quadrangles harmoniques.	104
Décomposition en inversions-symétries.	105



§ H / Topologie des espaces projectifs.....	108
Exemple des espaces projectifs réels.....	109
Exemple des espaces projectifs complexes.....	110
CHAPITRE III / <i>Classification des coniques et quadriques</i>	112
§ A / Qu'est-ce qu'une quadrique?.....	112
§ B / Classification affine et euclidienne des quadriques.....	114
Généralités.....	114
Classification sur un corps algébriquement clos.....	116
Classification affine sur \mathbf{R}	116
Classification affine des coniques de \mathbf{R}^2	117
Classification euclidienne des coniques de \mathbf{R}^2	117
Classification affine dans \mathbf{R}^3 , droites sur les quadriques.....	118
§ C / Classification projective des quadriques réelles.....	119
Généralités.....	119
Variétés de Segre.....	121
§ D / Classification des coniques et quadriques sur un corps fini....	122
Classification des coniques.....	122
Classification des quadriques d'un espace de dimension 3.....	123
CHAPITRE IV / <i>Dualité par rapport à une quadrique</i>	126
§ A / Conjugaison, hyperplans polaires et pôles.....	126
§ B / Polaires et pôles par rapport aux coniques.....	128
Cas des coniques décomposées.....	128
Polaires d'un point par rapport aux coniques d'un faisceau.....	129
Pôles d'une droite par rapport aux coniques propres d'un faisceau..	130
Conique harmoniquement circonscrite à une autre.....	133
§ C / Transformation par polaires réciproques. Équations tangen- tielles.....	135
Forme inverse et équation tangentielle d'une quadrique.....	136
Équation tangentielle d'une courbe plane.....	137
Transformation par polaires réciproques.....	139
§ D / Applications aux coniques.....	141
Quelques traductions, Brianchon.....	141
Correspondance entre les décompositions ponctuelles et tangen- tielles.....	142
Faisceaux linéaires tangentiels.....	144

8 Géométrie projective

Foyers.....	145
Podaire d'un point par rapport à une conique.....	148
APPENDICE / <i>Correspondances</i> (2, 2).....	150
Faits admis.....	150
Correspondances entre deux droites projectives	152
Correspondances (2, 2) et biquadratiques ; cas de décomposition... ..	154
Correspondances symétriques et symétrisables.....	156
Points critiques	159
Interprétation géométrique des correspondances (2, 2) symétriques.. .	162
Notions sur les courbes tracées sur une quadrique S	170
Notions sur la composition des correspondances.....	172
BIBLIOGRAPHIE SUCCINCTE	174
INDEX.....	175

Issue des réflexions des peintres de la Renaissance sur la perspective, la géométrie projective s'est avérée, au début du XIX^e siècle, être un outil unificateur de résultats géométriques disparates et un puissant moyen pour aller plus loin. A partir du milieu du XIX^e siècle, la géométrie projective a été le fondement sur lequel s'est développée la géométrie algébrique. Dans le grand développement de celle-ci, jusqu'à l'époque contemporaine, les notions projectives y ont gardé une place de choix, notamment par le biais des systèmes linéaires.

Partant d'un prérequis assez élémentaire d'algèbre, ce livre expose les fondements — tant algébriques qu'axiomatiques — de la géométrie algébrique et donne une grande place à leurs applications aux cercles, coniques et quadriques.

A la portée des étudiants du premier cycle et des élèves des classes préparatoires, il est destiné à tous les amateurs de géométrie.

Pierre Samuel, spécialiste d'algèbre et de géométrie algébrique, est professeur à l'Université de Paris-Sud (Orsay).