

**TRAVAUX EN COURS**

*Jean-Loup Mauclaire*

---

*Intégration et  
théorie des nombres*

COLLECTION DIRIGÉE PAR JEAN DIEUDONNÉ ET LÊ DUNG TRANG



HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS, PARIS

JEAN-LOUP MAUCLAIRE

JB

M. 16  
3<sup>2</sup>x

# Intégration et théorie des nombres

M 16

1299/3  
3



# TABLE DES MATIÈRES

Préface .....	1
Introduction .....	1
CHAPITRE I : SUITES PRESQUE-PÉRIODIQUES.....	1
1. Compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ .....	1
a. Groupe associé à un caractère de $\mathbb{Z}$ .....	1
b. Compactifié de Bohr de $\mathbb{Z}$ .....	2
2. Suites presque-périodiques .....	4
a. Généralités .....	4
b. Groupe associé à une suite presque-périodique .....	8
c. Une remarque sur la complétion de $\mathbb{B}^\alpha$ .....	10
d. Suites B.P.P à valeurs 1 ou 0 .....	12
e. Distribution d'une suite B.P.P réelle .....	15
f. Rapport entre fonction presque-périodique sur $\mathbb{R}$ et suite presque-périodique .....	20
g. Une application d'un résultat de Kac. ....	21
3. Suites limite-périodiques .....	25
a. Généralités .....	25
b. Formule de la moyenne particulière à un élément de B.L.P. ....	30
c. Une remarque sur la formule de sommation précédente. ....	36
d. Suites limite-périodiques associées aux fonctions invariantes par $G^*$ ..	39
e. Sommes de Ramanujan .....	41
f. Suite B.L.P associée à une fonction de $L(E, d\mu)$ .....	46
g. Approximation d'une fonction de $L(E, d\mu)$ .....	47
h. Inversion de la transformation de Fourier .....	49
4. Complétion analytique des espaces $B^\lambda$ .P.P. ....	58
Notes relatives au chapitre I .....	62
Références .....	65

CHAPITRE II : FONCTIONS MULTIPLICATIVES GENERALISEES ET ESPACES DE FONCTIONS INTEGRABLES .....	69
1. Introduction .....	69
2. Position du problème et résultats .....	70
a. Généralisation de quelques concepts classiques .....	70
b. Résultats préliminaires .....	73
c. Enoncé des résultats .....	76
3. Preuve des théorèmes .....	78
Notes relatives au chapitre II .....	107
Références .....	108
CHAPITRE III : MOYENNE ARITHMETIQUE ET FONCTIONS MULTIPLICATIVES GENERALISEES .....	109
1. Introduction .....	109
2. Position du problème et préliminaires .....	109
3. Conséquences des conditions $H(\Lambda)$ et $H(L)$ .....	111
4. Relation avec le chapitre précédent .....	113
5. Enoncé du résultat .....	114
6. Preuve du théorème .....	114
Notes relatives au chapitre III .....	130
CHAPITRE IV : APPLICATIONS DES RESULTATS DES CHAPITRES PRECEDENTS A QUELQUES PROBLEMES DE THEORIE DES NOMBRES .....	131
1. Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives .....	131
a. Théorème 1 .....	131
b. Rationnalité du spectre d'une fonction multiplicative B.P.P. ....	136
2. Fonctions additives .....	138
a. Théorème d'Erdős et Wintner .....	138
b. Remarques .....	141
c. Compléments .....	141
d. Autre complément .....	144
3. Le cas de la fonction de Ramanujan .....	145
Notes relatives au chapitre IV .....	150
Références .....	152



L'ouvrage expose comment la simple considération des structures topologiques associées naturellement aux nombres entiers permet de formuler les propriétés de suites particulières en termes de propriétés de fonctions intégrables. La correspondance ainsi établie amène à traiter un certain nombre de problèmes classiques dans un contexte élargi, et à en donner la solution par des méthodes immédiates de théorie de la mesure. Les propriétés des espaces considérés qui interviennent effectivement sont bien mises en évidence, ce qui permet de réduire à un strict minimum le côté « méthodes élémentaires » : aucun des grands résultats classiques de théorie probabiliste des nombres (inégalité de Turan-Kubilius, théorème des nombres premiers, etc.) n'est requis, et les méthodes et résultats débordent largement du cadre des fonctions arithmétiques ordinaires.

L'ouvrage s'adresse aussi bien à des chercheurs qu'à des enseignants en mathématiques. Il a été d'ailleurs rédigé de façon à ce qu'il soit possible à un étudiant ayant suivi un cours d'intégration niveau deuxième cycle, de le lire sans difficultés majeures, d'où parfois un certain aspect « application directe du cours », bien qu'il s'agisse d'un travail de recherche original.

ISBN 2 7056 6035 6

160 F