

Série
Schaum

Seymour Lipschutz

Topologie

Cours et problèmes

600 problèmes résolus

Série *Schaum*

M 150

Topologie

Cours et problèmes

Seymour Lipschutz

*Professeur associé de mathématiques
Temple University*

**Traduction par
M. LOBENBERG**

Septième tirage

5784 $\frac{5}{10}$



McGRAW-HILL

New York – St. Louis – San Francisco – Auckland
Bogotá – Caracas – Lisbonne – Londres – Madrid – Mexico
Milan – New Delhi – Panama – San Juan
São Paulo – Singapour – Sydney – Tokyo – Toronto

Table des matières

Chapitre 1. Ensemble et relations	
Ensembles, éléments	1
Sous-ensembles	2
Ensemble universel et ensemble vide	2
Classes, collections, familles et espaces	2
Opération sur les ensembles	3
Produit cartésien d'ensembles	4
Relations	5
Relations d'équivalence	6
Composition des relations	7
Chapitre 2. Applications	
Applications	19
Injection, surjection, application réciproque et application identique	20
Famille indexée, produit d'une famille d'ensembles	21
Généralisation des notions de réunion et d'intersection	21
Fonctions d'ensembles associées à une application	22
Algèbre des applications à valeurs réelles	24
Chapitre 3. Cardinaux et relations d'ordre	
Ensembles équipotents	36
Ensembles dénombrables	36
La puissance du continu	37
Le théorème de Schroeder-Bernstein	37
La notion de cardinal	38
Le théorème de Cantor et l'hypothèse du continu	38
Ensembles ordonnés	39
Sous-ensembles d'un ensemble ordonné	39
Plus petit et plus grand élément	40
Éléments maximaux et éléments minimaux	40
Majorants et minorants	40
Lemme de Zorn	41
Chapitre 4. Topologie de la droite et du plan	
La droite numérique réelle	53
Ensembles ouverts de R	53
Points d'accumulation	54
Théorème de Bolzano-Weierstrass	55
Ensembles fermés	55
Théorème de Heine-Borel	55
Suites	56
Suites convergentes	56
Sous-suites	57

	Suites de Cauchy	58
	Caractère complet	58
	Fonctions continues	58
	Topologie du plan	60
Chapitre 5.	Espaces topologiques : définitions X	
	Espaces topologiques	74
	Points d'accumulation	75
	Ensembles fermés	76
	Fermeture ou adhérence d'un ensemble	77
	Intérieur, extérieur, frontière	78
	Voisinages et systèmes de voisinages	79
	Suites convergentes	79
	Topologies moins fine et plus fine	80
	Sous-espaces, topologie induite	80
	Définitions équivalentes d'une topologie	81
Chapitre 6.	Bases et sous-bases	
	Base d'une topologie	98
	Sous-bases	99
	Topologie engendrée par une famille d'ensembles	100
	Base locale	100
Chapitre 7.	Continuité et homéomorphie	
	Applications continues	109
	Applications continues et proximité arbitraire	110
	Continuité en un point	111
	Continuité séquentielle en un point	111
	Applications ouvertes et fermées	111
	Espaces homéomorphes	112
	Propriétés topologiques	113
	Topologie induite par des applications	113
Chapitre 8.	Espaces métriques et normés α \circ	
	Distances	124
	Distances d'ensembles, diamètres	125
	Boules ouvertes	126
	Topologies induites par une métrique, espaces métriques	127
	Propriétés des topologies induites par une métrique	128
	Métriques ou distances équivalentes	128
	Problème de métrisabilité	129
	Espaces métriques isométriques	129
	Espace euclidien de dimension m	130
	Espace de Hilbert	130
	Convergence et continuité dans les espaces métriques	131
	Espaces normés	131
Chapitre 9.	Dénombrabilité	
	Espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité	145
	Espaces vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité	145
	Théorèmes de Lindelöf	146
	Espaces séparables	146
	Propriétés héréditaires	147
Chapitre 10.	Axiomes de séparation	
	Introduction	154
	Espaces T_1	154

Espaces séparés ou de Hausdorff	154
Espaces réguliers	155
Espaces normaux	156
Lemme d'Urysohn et théorème de métrisabilité	157
Applications séparant les points	157
Espaces complètement réguliers	157
Chapitre 11. Compacité \wedge	
Recouvrements	167
Ensembles compacts	167
Sous-ensembles d'espaces compacts	169
Propriété d'intersection finie	169
Compacité et espaces séparés	169
Espaces séquentiellement compacts	170
Ensembles possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass	171
Espaces localement compacts	172
Compactification	172
Compacité dans les espaces métriques	173
Ensembles précompacts	174
Nombre de Lebesgue d'un recouvrement	175
Chapitre 12. Espaces produits	
Topologie produit	184
Base de la topologie produit pour un produit fini	185
Sous-base et base de définition de la topologie produit	185
Exemple d'un espace produit	186
Théorème de Tychonoff sur le produit de compacts	188
Produits d'espaces métriques	188
Ensemble de Cantor	189
Propriétés de l'ensemble de Cantor	189
Chapitre 13. Connexité \bowtie	
Ensembles séparés	198
Ensembles connexes	198
Espaces connexes	199
Connexité sur la droite réelle	200
Composantes connexes	201
Espaces localement connexes	202
Chemins	202
Ensembles connexes par arcs	203
Chemins homotopes	203
Espaces simplement connexes	204
Chapitre 14. Espaces métriques complets \times	
Suites de Cauchy	215
Espaces métriques complets	216
Principe des fermés enboîtés	216
Espaces complets et applications contractantes	217
Complétions	217
Théorème de Baire	218
Espaces complets et compacité	218
Construction des nombres réels	219
Chapitre 15. Espaces de fonctions	
Espaces de fonctions	227
Topologie définie par un point et un ouvert	227
Convergence simple	228
Convergence uniforme	229

L'espace de fonctions $C[0, 1]$	230
Fonctions uniformément bornées	231
Equicontinuité, théorème d'Ascoli	231
Topologie définie par un compact et un ouvert	232
Topologie de la convergence uniforme compacte	232
Fonctionnelles sur les espaces normés	233
Appendice	
Propriétés des nombres réels	245
Axiomes de corps	245
La droite réelle	246
Sous-ensembles de \mathbf{R}	246
Nombres positifs	246
Ordre	247
Valeur absolue	248
Axiome de la borne supérieure	248
Propriété des intervalles emboîtés	249
Index	256
Index des symboles	260

Série Schaum

Le bon réflexe pour comprendre les éléments fondamentaux du cours et pour réussir aux examens

- une série unique, de renommée mondiale, disponible en 15 langues
- plus de 45 000 exercices résolus introduits par de nombreux rappels de cours
- des ouvrages spécialement conçus pour l'étudiant

BIOLOGIE

Anatomie et physiologie humaines
Génétique 2^e éd.

CHIMIE

Biochimie, 2 vol.
Chimie analytique
Chimie générale 7^e éd.
Chimie organique
Chimie physique, 2 vol.

ÉCONOMIE

Macroéconomie 2^e éd.
Mathématiques pour l'économiste
Microéconomie 2^e éd.
Principes d'économie

ÉLECTRICITÉ, ÉLECTRONIQUE

Circuits électriques
Communications analogiques
et numériques
Électronique, 2 vol.
Microprocesseurs, 2 vol.
Systèmes asservis 2^e éd.
Techniques numériques

GESTION, COMPTABILITÉ

Gestion de la production
et des opérations
Statistiques de la gestion

Technique comptable approfondie
Technique comptable de base

INFORMATIQUE

Infographie
Introduction à l'informatique
Mathématiques pour informaticiens
Programmation Basic
Programmation en assembleur
Programmation en C
Programmation en C++
Programmation en Cobol structuré
Programmation Fortran
Programmation Pascal
Structures de données
Traitement de l'information

MATHÉMATIQUES

Algèbre linéaire 2^e éd.
Algèbre moderne
Analyse
Analyse de Fourier
Analyse numérique
Analyse vectorielle
Calcul différentiel et intégral 2^e éd.
Calcul matriciel
Équations différentielles
Équations différentielles - Méthodes
et applications
Formules et tables de mathématiques

Géométrie analytique
Introduction au calcul différentiel
et intégral
Mathématiques de base 2^e éd.
Mathématiques discrètes
Matrices
Probabilités
Probabilités et statistique
Statistique 2^e éd.
Topologie
Transformées de Laplace
Trigonométrie
Variables complexes

PHYSIQUE

Électromagnétisme
Mécanique générale
Optique
Physique appliquée
Physique générale
Physique générale
et appliquée
Physique de l'ingénieur
Physique moderne
Thermodynamique

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Mécaniques des fluides
et hydraulique 2^e éd.
Résistance des matériaux, 2 vol.



Pour tous renseignements concernant
les ouvrages de la série Schaum en français,
s'adresser à :
Ediscience international,
28, rue Beaunier
75014 Paris

ISBN : 2-7042-1025-X

ISSN : 0768-2727

