

Cours de calcul différentiel

Henri Cartan

HERMANN  ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

METHODES

Henri Cartan

M. 2 15
INT.

COURS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL

Nouvelle édition refondue et corrigée

1260/e



Hermann
Paris



Collection
Méthodes

TABLE

Première partie : Calcul différentiel

I. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS LES ESPACES DE BANACH

1. <i>Rappel de notions relatives aux espaces de Banach et aux applications linéaires continues</i>	11
1.1. Normes sur un espace vectoriel E	11
1.2. Exemples d'espaces de Banach	12
1.3. Séries normalement convergentes dans un espace de Banach	14
1.4. Applications linéaires continues	15
1.5. Composition des applications linéaires continues	17
1.6. Isomorphismes d'espaces vectoriels normés ; normes équivalentes sur un e.v. normé	17
1.7. Exemples d'espaces $\mathcal{L}(E; F)$	20
1.8. Applications multilinéaires continues	24
1.9. L'isométrie naturelle $\mathcal{L}(E, F; G) \approx \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$	26
2. <i>Applications différentiables</i>	28
2.1. Définition d'une application différentiable	28
2.2. Dérivée d'une fonction composée	31
2.3. Linéarité de la dérivée	32
2.4. Dérivées de fonctions particulières	32
2.5. Fonction à valeurs dans un produit d'espaces de Banach	36
2.6. Cas où U est un ouvert d'un produit d'espaces de Banach	38
2.7. Combinaison des cas étudiés en 2.5 et 2.6	40
2.8. Remarque finale : comparaison entre \mathbf{R} -différentiabilité et \mathbf{C} -différentiabilité	40
3. <i>Théorème des accroissements finis ; applications</i>	41
3.1. Enoncé du théorème principal	41
3.2. Cas particuliers du théorème principal	44
3.3. Théorème des accroissements finis lorsque la variable est dans un espace de Banach	44
3.4. Encore le théorème des accroissements finis	48

TABLE

3.5.	Une liste d'exercices	48
3.6.	Première application du théorème des accroissements finis: convergence d'une suite de fonctions différentiables	49
3.7.	Deuxième application du théorème des accroissements finis: relation entre différentiabilité partielle et différentiabilité	51
3.8.	Troisième application du théorème des accroissements finis: notion de fonction strictement différentiable	53
4.	<i>Inversion locale d'une application de classe C^1. Théorème des fonctions implicites</i>	54
4.1.	Difféomorphismes de classe C^1	54
4.2.	Le théorème d'inversion locale	56
4.3.	Démonstration du théorème d'inversion locale: première réduction	57
4.4.	Démonstration de la proposition 4.3.1	57
4.5.	Démonstration du théorème 4.4.1	58
4.6.	Théorème d'inversion locale dans le cas de la dimension finie	60
4.7.	Théorème des fonctions implicites	61
5.	<i>Dérivées d'ordre supérieur</i>	64
5.1.	Dérivée seconde	64
5.2.	Cas où E est un produit $E_1 \times \dots \times E_n$	67
5.3.	Dérivées successives	69
5.4.	Exemples de fonctions n fois différentiables	71
5.5.	Formule de Taylor: cas particulier	75
5.6.	Formule de Taylor: cas général	76
6.	<i>Polynômes</i>	79
6.1.	Polynômes homogènes de degré n	79
6.2.	Polynômes non nécessairement homogènes	82
6.3.	Les « différences » successives d'un polynôme	84
6.4.	Cas où E et F sont des espaces vectoriels normés	86
7.	<i>Développements limités</i>	88
7.1.	Définitions	88
7.2.	Cas où f est n fois différentiable au point a	91
7.3.	Opérations sur les développements limités	92
7.4.	Composition de deux développements limités	93
7.5.	Calcul des dérivées ⁽¹⁾ successives d'une fonction composée	95

8. <i>Maxima et minima relatifs</i>	96
8.1. Première condition nécessaire pour un minimum relatif	96
8.2. Condition du second ordre pour le minimum relatif	97
8.3. Condition suffisante pour le minimum relatif strict	98
EXERCICES	102

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. <i>Définitions et théorèmes fondamentaux</i>	109
1.1. Équation différentielle du premier ordre	109
1.2. Équation différentielle d'ordre n	110
1.3. Solutions approchées	111
1.4. Exemple : équation différentielle linéaire	114
1.5. Cas lipschitzien : lemme fondamental	116
1.6. Application du lemme fondamental : théorème d'unicité	118
1.7. Théorème d'existence dans le cas lipschitzien	119
1.8. Cas où f est localement lipschitzienne	121
1.9. Cas d'une équation différentielle linéaire	123
1.10. Dépendance de la valeur initiale	124
1.11. Cas où l'équation différentielle dépend d'un paramètre	125
2. <i>Équations différentielles linéaires</i>	127
2.1. Forme de la solution générale	127
2.2. Étude d'une équation linéaire homogène	127
2.3. Cas où E est de dimension finie	129
2.4. Équation linéaire « avec second membre »	131
2.5. Cas d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n	133
2.6. Équation différentielle linéaire d'ordre n « avec second membre »	136
2.7. Équation différentielle linéaire à coefficients constants	137
2.8. Équation à coefficients constants : cas où E est de dimension finie	139
2.9. Équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants	141
3. <i>Questions diverses</i>	142
3.1. Groupes à un paramètre d'automorphismes linéaires	142
3.2. Noyau de groupe à un paramètre	144
3.3. Questions de différentiabilité	146
3.4. Questions de différentiabilité (suite) : différentiabilité par rapport à la valeur initiale u	147
3.5. Démonstration du théorème 3.4.2	150

TABLE

3.6. Différentiabilité par rapport à un paramètre dont dépend l'équation différentielle	151
3.7. Différentiabilité d'ordre supérieur	152
3.8. Cas d'une équation différentielle du second ordre	153
3.9. Équations différentielles ne contenant pas la variable	155
3.10. Équations différentielles « non résolues »	158
4. <i>Intégrales premières et équations aux dérivées partielles linéaires</i>	162
4.1. Définition des intégrales premières d'un système différentiel	162
4.2. Existence des intégrales premières	164
4.3. Équation aux dérivées partielles linéaire non homogène	166
4.4. Exemples	167
<i>Exercices</i>	169

Deuxième partie : Formes différentielles

I. FORMES DIFFÉRENTIELLES

1. Applications multilinéaires alternées	
1.1. Définition des applications multilinéaires alternées	179
1.2. Groupes de permutations	179
1.3. Propriétés des applications multilinéaires alternées	180
1.4. Multiplication des applications multilinéaires alternées	182
1.5. Propriétés de la multiplication extérieure	184
1.6. Produit extérieur de n formes linéaires	187
1.7. Cas où E est de dimension finie	188
2. Formes différentielles	189
2.1. Définition des formes différentielles	189
2.2. Opérations sur les formes différentielles	190
2.3. L'opération de la différentiation extérieure	192
2.4. Propriétés de l'opération de différentiation extérieure	193
2.5. Propriété fondamentale de différentiation extérieure	195
2.6. Formes différentielles sur un espace de dimension finie	196
2.7. Calcul des opérations sur les formes différentielles en écriture canonique	198
2.8. Changement de variable dans les formes différentielles	201
2.9. Propriétés de l'application φ^* du changement de variable	202
2.10. Calcul de φ^* en écriture canonique	204
2.11. Transitivité du changement de variable	205
2.12. Condition pour qu'une forme différentielle soit égale à $d\alpha$	206
2.13. Démonstration du théorème de Poincaré	209
3. Intégrale curviligne d'une forme différentielle de degré un	214
3.1. Chemins de classe C^1	215
3.2. Intégrale curviligne	215
3.3. Changement de paramètre	217

TABLE

3.4. Cas où ω est la différentielle d'une fonction	218
3.5. Forme différentielle fermée de degré un	222
3.6. Primitive d'une forme fermée le long d'un chemin	224
3.7. Homotopie de deux chemins	226
3.8. Ouverts simplement connexes	226
4. <i>Intégration des formes différentielles de degré > 1</i>	231
4.1. Partitions différentiables de l'unité	231
4.2. Compact à bord dans le plan \mathbf{R}^2	235
4.3. Intégrale d'une 2-forme différentielle sur un compact à bord K	238
4.4. Théorème de Stokes dans le plan	240
4.5. Démonstration du théorème 4.4.1 (théorème de Stokes)	241
4.6. Changement de variable dans une intégrale double	245
4.7. Variétés dans l'espace \mathbf{R}^n	250
4.8. Orientation d'une variété	254
4.9. Intégration d'une 2-forme différentielle sur une variété compacte orientée de dimension 2 et de classe C^1	255
4.10. Intégrales n -uples	259
4.11. Formes différentielles sur une variété $M \subset \mathbf{R}^n$	261
4.12. Élément de volume p -dimensionnel d'une variété M de dimension p ($M \subset \mathbf{R}^n$)	262
5. <i>Maxima et minima d'une fonction numérique sur une variété</i>	265
5.1. Conditions du premier ordre	265
5.2. Conditions du second ordre	266
6. <i>Théorème de Frobenius</i>	268
6.1. Position du problème	268
6.2. Premier théorème d'existence	269
6.3. Deuxième théorème d'existence	271
6.4. Fin de la démonstration du deuxième théorème d'existence	272
6.5. Le théorème fondamental	274
6.6. Interprétation en termes de formes différentielles	276
<i>Exercices</i>	280

II. ÉLÉMENTS DE CALCUL DES VARIATIONS

1. <i>Position du problème</i>	287
1.1. L'espace des courbes de classe C^1	287
1.2. Fonctionnelle attachée à une courbe	288

1.3. Un exemple	291
1.4. Un problème de minimum	291
1.5. Transformation de la condition pour l'extrémum	292
1.6. Calcul de $f'(\varphi) \cdot u$ pour une extrémale	296
2. <i>Étude de l'équation d'Euler : existence des extrémales. Exemples</i>	297
2.1. Équations d'Euler dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$	297
2.2. Exemples	299
2.3. Équations de Lagrange en mécanique	302
2.4. Retour au cas général	303
2.5. Cas où $F(x, y)$ est quadratique-homogène en y	304
2.6. Cas des géodésiques d'une variété	306
2.7. Problème d'extrémum pour des courbes assujetties à rester sur une variété	309
2.8. Transformation de la condition précédente	311
3. <i>Problèmes à deux dimensions</i>	313
3.1. Position du problème	313
3.2. Transformation de la condition pour l'extrémum	314
<i>Exercices</i>	318
III. APPLICATIONS DE LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE À LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES	
1. <i>Le repère mobile</i>	324
1.1. Définition des formes différentielles ω_i et ω_{ij}	324
1.2. Relations auxquelles satisfont les formes ω_i et ω_{ij}	325
1.3. Repères orthonormés	326
1.4. Repères de Frenêt d'une courbe orientée de \mathbf{R}^3	327
1.5. Repères de Darboux d'une courbe orientée C tracée sur une surface orientée S de \mathbf{R}^3	329
1.6. Calcul de la courbure géodésique, de la courbure normale et de la torsion géodésique	330
2. <i>Famille à 3 paramètres de repères attachés à une surface de \mathbf{R}^3</i>	332
2.1. La variété des repères d'une surface orientée	332
2.2. Les équations du mouvement du repère attaché à une surface	334
2.3. Élément d'aire de la surface S	336
2.4. Deuxième forme quadratique fondamentale de la surface S	336

TABLE

2.5. Calcul de la courbure normale et de la torsion géodésique dans une direction donnée	337
2.6. Directions principales : lignes de courbure	339
2.7. La forme différentielle de courbure géodésique	341
2.8. Utilisation d'un champ de repères	342
2.9. Transport parallèle le long d'une courbe	343
2.10. Relation entre la courbure totale et le transport parallèle	344
2.11. Calcul de la courbure totale d'une surface à l'aide de la première forme fondamentale	347
<i>Exercices</i>	349
<i>Index : Calcul différentiel</i>	353
<i>Index : Formes différentielles</i>	355