

MONOGRAPHIES INTERNATIONALES DE MATHÉMATIQUES MODERNES

6

MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES DANS LA THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

par A. GELFOND
et Y. LINNIK

The logo consists of the letters 'GV' in a stylized, intertwined font. The 'G' is on the left and the 'V' is on the right, with their stems overlapping.

GAUTHIER-VILLARS PARIS

MONOGRAPHIES INTERNATIONALES
DE
MATHÉMATIQUES MODERNES

Sous la direction de S. MANDELBROJT
Professeur au Collège de France

**Méthodes élémentaires
dans la théorie analytique
des nombres**

par

A. GELFOND ET Y. LINNIK

Traduit par

Myriam et Jean-Luc VERLEY

M 21
276-1 $\frac{1}{1}$



1965
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
PARIS

TABLE

| | |
|---|----|
| PRÉFACE | V |
| CHAPITRE 1. — Propriétés additives des nombres. Méthode de L. G. Schnirelman. Théorème de G. Mann. Théorème de P. Erdős. | |
| § 1 Propriétés additives des suites | 1 |
| § 2 Le théorème de G. Mann | 4 |
| § 3 Composantes essentielles. Théorème de P. Erdős | 10 |
| CHAPITRE 2. — Solutions élémentaires du problème de Warring et du problème de Hilbert-Kamke. | |
| § 1 Les problèmes de Warring et de Hilbert-Kamke | 14 |
| § 2 Lemme fondamental pour la solution élémentaire du problème de Warring | 15 |
| § 3 Lemmes sur les équations linéaires | 16 |
| § 4 Démonstration du lemme fondamental | 24 |
| § 5 Nouvelles majorations pour $r_k(m)$ | 25 |
| § 6 Fin de la démonstration | 29 |
| § 7 Énoncé du problème de Hilbert-Kamke | 31 |
| § 8 Les suites de vecteurs entiers et leur densité | 32 |
| § 9 Plusieurs lemmes | 33 |
| § 10 Démonstration du lemme fondamental | 37 |
| CHAPITRE 3. — Le problème de la distribution des nombres premiers. | |
| § 1 Les fonctions arithmétiques et leurs relations. Estimation de la quantité de nombres premiers contenus dans un segment de la suite des entiers naturels | 43 |
| § 2 Le théorème de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans une progression arithmétique | 47 |
| § 3 Inégalités fondamentales pour l'estimation de la quantité de nombres premiers contenus dans la suite naturelle | 51 |
| § 4 Inégalités fondamentales pour estimer la quantité de nombres premiers contenus dans une progression | 61 |
| § 5 Démonstration des théorèmes asymptotiques sur la distribution des nombres premiers dans la suite naturelle et dans les progressions..... | 65 |
| § 6 Étude des nombres premiers dans des suites un peu plus générales que les progressions | 71 |
| CHAPITRE 4. — Conséquences élémentaires de la loi de distribution des nombres premiers de Gauss. Un théorème sur les nombres presque-premiers de Gauss. | |
| § 1 Introduction | 79 |
| § 2 Plusieurs formules utiles | 81 |

§ 3 Démonstration d'une formule pour $\sum_{\rho \in D} \log^2 |\rho| + \frac{1}{4} \sum_{\substack{\rho, \sigma \\ \rho, \sigma \in D}} \log |\rho| \log |\sigma|$ 85

§ 4 Estimation récurrente du terme résiduel 88

§ 5 Les « îlots » à petites valeurs de $|G(D/v)|$ 93

§ 6 Démonstration du théorème 98

§ 7 Un théorème sur les nombres de Gauss presque-premiers 102

CHAPITRE 5. — Le crible d'Eratosthène.

§ 1 Le « double crible rectangulaire » 104

§ 2 Le crible de Viggo Brun 108

CHAPITRE 6. — La méthode de A. Selberg.

§ 1 Les estimations de A. Selberg 123

§ 2 Le théorème de Schnirelman 131

CHAPITRE 7. — Sur la répartition des parties fractionnaires des suites numériques.

§ 1 Position du problème. 134

§ 2 Un lemme sur les différences 135

§ 3 Un lemme sur un système incomplet de résidus 139

§ 4 Comparaison de deux sommes 141

§ 5 Démonstration élémentaire, due à I. M. Vinogradov, de quelques théorèmes sur la suite des nombres premiers 144

§ 6 Démonstration du théorème 153

CHAPITRE 8. — Dénombrement des points entiers à l'intérieur des contours.

§ 1 Position du problème. Exemples* 157

§ 2 Énoncé du théorème de I. M. Vinogradov* 160

§ 3 Applications de la formule de I. Ya. Sonine* 168

§ 4 Généralisation du théorème 8.2.1* 169

§ 5 Extension à un contour fermé* 171

CHAPITRE 9. — Sur la distribution des résidus des puissances.

§ 1 Un théorème de I. M. Vinogradov 174

§ 2 Démonstration du théorème 9.1.1 179

§ 3 Autres théorèmes élémentaires sur la distribution des caractères. Problèmes ouverts 181

§ 4 Conséquences élémentaires d'un théorème non élémentaire. 186

CHAPITRE 10. — Démonstration élémentaire du théorème de Hasse.

§ 1 Position du problème. 196

§ 2 Addition des solutions 197

§ 3 Construction fondamentale. 199

§ 4 Démonstration du théorème à partir du lemme fondamental. 201

§ 5 Démonstration du lemme fondamental 202

CHAPITRE 11. — Démonstration élémentaire du théorème de K. L. Siegel.

| | | |
|-----|---|-----|
| § 1 | Énoncé du problème. Procédé de démonstration | 207 |
| § 2 | Lemmes | 208 |
| § 3 | Démonstration du lemme fondamental I | 210 |
| § 4 | Suite de la démonstration. Autre lemme | 213 |
| § 5 | Lemme fondamental II. Fin de la démonstration | 218 |

CHAPITRE 12. — Transcendance de quelques classes de nombres.

| | | |
|-----|--|-----|
| § 1 | Propositions auxiliaires* | 221 |
| § 2 | Théorèmes généraux sur la transcendance de e^{ω} et a^{β} pour ω, a, β algébriques réels | 224 |

| | |
|---------------------|-----|
| BIBLIOGRAPHIE | 229 |
|---------------------|-----|



IMPRIMÉ EN FRANCE. — GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR, PARIS.

IMPRIMERIE JOUVE, 15, RUE RACINE, PARIS-VI^e. — 9-1965

DÉPÔT LÉGAL : 3^e TRIMESTRE 1965.

N^o de dépôt légal : 1361

N^o de code 518-58