

**JEAN-PIERRE  
SERRE**

REPRÉSENTATIONS  
LINÉAIRES DES  
**GROUPES FINIS**

*Hermann  
Paris*



*Collection  
Méthodes*

Jean-Pierre Serre

REPRÉSENTATIONS  
LINÉAIRES  
DES  
GROUPES FINIS

TROISIÈME ÉDITION CORRIGÉE



M 114

2282

$\frac{1}{1}$

Hermann  
Paris



Collection  
Méthodes

# Table

<i>Introduction</i> .....	11
I. REPRÉSENTATIONS ET CARACTÈRES	
§ 1. <i>Généralités sur les représentations linéaires</i> .....	15
1.1. Définitions .....	15
1.2. Premiers exemples .....	16
1.3. Sous-représentations .....	17
1.4. Représentations irréductibles .....	19
1.5. Produit tensoriel de deux représentations .....	20
§ 2. <i>Théorie des caractères</i> .....	23
2.1. Le caractère d'une représentation.....	23
2.2. Le lemme de Schur; premières applications .....	25
2.3. Les relations d'orthogonalité des caractères.....	27
2.4. Décomposition de la représentation régulière .....	30
2.5. Nombre des représentations irréductibles .....	31
2.6. La décomposition canonique d'une représentation.....	33
2.7. Décomposition explicite d'une représentation .....	35
§ 3. <i>Sous-groupes, produits, représentations induites</i> .....	39
3.1. Sous-groupes commutatifs .....	39
3.2. Produit de deux groupes .....	40
3.3. Représentations induites.....	42
§ 4. <i>Extension aux groupes compacts</i> .....	47
4.1. Groupes compacts .....	47
4.2. Mesure invariante sur un groupe compact .....	47
4.3. Représentations linéaires des groupes compacts .....	48
§ 5. <i>Exemples</i> .....	51
5.1. Le groupe cyclique $C_n$ .....	51
5.2. Le groupe $C_\infty$ .....	51

5.3. Le groupe diédral $D_n$ .....	52
5.4. Le groupe $D_{nh}$ .....	54
5.5. Le groupe $D_\infty$ .....	55
5.6. Le groupe $D_{\infty h}$ .....	56
5.7. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ .....	57
5.8. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ .....	58
5.9. Le groupe du cube .....	59
<i>Bibliographie</i> (Partie I) .....	60
II. REPRÉSENTATIONS EN CARACTÉRISTIQUE ZÉRO	
§ 6. <i>L'algèbre du groupe</i> .....	63
6.1. Représentations et modules .....	63
6.2. Décomposition de $\mathbf{C}[G]$ .....	64
6.3. Le centre de $\mathbf{C}[G]$ .....	65
6.4. Rappels sur les entiers .....	66
6.5. Propriétés d'intégralité des caractères. Applications .....	67
§ 7. <i>Représentations induites; critère de Mackey</i> .....	71
7.1. Rappels .....	71
7.2. Caractère d'une représentation induite; formule de réciprocity .....	72
7.3. Restriction aux sous-groupes .....	74
7.4. Critère d'irréductibilité de Mackey .....	75
§ 8. <i>Exemples de représentations induites</i> .....	77
8.1. Sous-groupes distingués; applications aux degrés des représentations irréductibles .....	77
8.2. Produits semi-directs par un groupe commutatif .....	78
8.3. Rappels sur certaines classes de groupes finis .....	79
8.4. Théorème de Sylow .....	81
8.5. Représentations linéaires des groupes hyper-résolubles .....	82
§ 9. <i>Théorème d'Artin</i> .....	85
9.1. L'anneau $R(G)$ .....	85
9.2. Énoncé du théorème d'Artin .....	86
9.3. Première démonstration .....	87
9.4. Deuxième démonstration de i) $\Rightarrow$ ii) .....	88
§ 10. <i>Théorème de Brauer</i> .....	91
10.1. <i>Éléments <math>p</math>-réguliers; sous-groupes <math>p</math>-élémentaires</i> .....	91
10.2. Caractères induits provenant des sous-groupes $p$ -élémentaires .....	92
10.3. Construction de caractères .....	93

10.4. Démonstration des théorèmes 18 et 18'	94
10.5. Théorème de Brauer	95
§ 11. <i>Applications du théorème de Brauer</i>	97
11.1. Caractérisations des caractères	97
11.2. Un théorème de Frobenius	99
11.3. Réciproque du théorème de Brauer	101
11.4. Spectre de $A \otimes R(G)$	102
§ 12. <i>Questions de rationalité</i>	105
12.1. Les anneaux $R_K(G)$ et $\bar{R}_K(G)$	105
12.2. Indices de Schur	107
12.3. Réalisabilité sur les corps cyclotomiques	109
12.4. Rang du groupe $R_K(G)$	109
12.5. Généralisation du théorème d'Artin	111
12.6. Généralisation du théorème de Brauer	112
12.7. Démonstration du théorème 28	113
§ 13. <i>Questions de rationalité: exemples</i>	117
13.1. Le cas du corps des nombres rationnels	117
13.2. Le cas du corps des nombres réels	121
<i>Bibliographie (Partie II)</i>	125

### III. INTRODUCTION A LA THÉORIE DE BRAUER

§ 14. <i>Les groupes <math>R_K(G)</math>, <math>R_k(G)</math> et <math>P_k(G)</math></i>	129
14.1. Les anneaux $R_K(G)$ et $R_k(G)$	129
14.2. Les groupes $P_k(G)$ et $P_A(G)$	130
14.3. Structure de $P_k(G)$	130
14.4. Structure de $P_A(G)$	132
14.5. Dualités	134
14.6. Extension des scalaires	135
§ 15. <i>Le triangle <math>cde</math></i>	137
15.1. Définition de $c : P_k(G) \rightarrow R_k(G)$	137
15.2. Définition de $d : R_K(G) \rightarrow R_k(G)$	137
15.3. Définition de $e : P_k(G) \rightarrow R_K(G)$	139
15.4. Premières propriétés du triangle $cde$	140
15.5. Exemple : le cas des $p'$ -groupes	140
15.6. Exemple : le cas des $p$ -groupes	141
15.7. Exemple : produits de $p'$ -groupes et de $p$ -groupes	142
§ 16. <i>Théorèmes</i>	143
16.1. Propriétés du triangle $cde$	143
16.2. Caractérisation de l'image de $e$	145

16.3. Caractérisation des $A[G]$ -modules projectifs par leur caractère .....	145
16.4. Exemples de $A[G]$ -modules projectifs : représentations irréductibles de défaut nul .....	147
§ 17. <i>Démonstrations</i> .....	149
17.1. Changement de groupe .....	149
17.2. Le théorème de Brauer dans le cas modulaire .....	150
17.3. Démonstration du théorème 33 .....	151
17.4. Démonstration du théorème 35 .....	152
17.5. Démonstration du théorème 37 .....	153
17.6. Démonstration du théorème 38 .....	155
§ 18. <i>Caractères modulaires</i> .....	159
18.1. Le caractère modulaire d'une représentation .....	159
18.2. Indépendance des caractères modulaires .....	161
18.3. Traductions .....	163
18.4. Une section de $d$ .....	164
18.5. Exemple : caractères modulaires du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ .....	165
18.6. Exemple : caractères modulaires du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$ ...	167
§ 19. <i>Application aux représentations d'Artin</i> .....	171
19.1. Représentations d'Artin et de Swan .....	171
19.2. Rationalité des représentations d'Artin et de Swan .....	172
19.3. Un invariant .....	173
<i>Annexe</i> .....	175
<i>Bibliographie</i> (Partie III) .....	177
<i>Index des notations</i> .....	179
<i>Index terminologique</i> .....	181

# REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

*Représentations et caractères. Représentations en caractéristique  
Introduction à la théorie de Brauer.*

La première partie est rédigée de façon à pouvoir être utilisée aussi bien par des physiciens ou chimistes que par des mathématiciens. Elle expose la correspondance, due à Frobenius, entre représentations linéaires et caractères. Il s'agit de résultats fondamentaux, d'usage constant aussi bien en mathématique qu'en chimie quantique, ou en physique. La seconde partie complète la première sur des points plus techniques : caractères induits, théorème de Brauer, questions de rationalité. La troisième partie est une introduction à la théorie de Brauer ; elle utilise librement le langage des catégories abéliennes (modules projectifs, groupes de Grothendieck).

Les auteurs de la collection *Méthodes* ont la double vocation de chercheurs et d'enseignants ; aussi leurs livres donnent-ils l'exposé le plus à jour des questions traitées, avec une présentation pédagogique expérimentée et attrayante. Cette synthèse permet au lecteur, dans chaque discipline et à chaque niveau, d'accéder aux stades les plus avancés de la connaissance en percevant l'ensemble du sujet de façon claire et en étant informé des développements en cours.

*Les méthodes sont les habitudes de l'esprit  
et les économies de la mémoire.*

*Rivarol*

