

10

# MÉTHODES EXPLICITES DE L'OPTIMISATION

**J.P. AUBIN  
P. NEPOMIASTCHY  
A.M. CHARLES**

COLLECTION

**Méthodes  
Mathématiques  
de  
l'Informatique**

SOUS LA DIRECTION DE J.-L. LIONS

**Dunod**

# MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE — 10

Collection dirigée par J.L. LIONS

## méthodes explicites de l'optimisation

IDC 544  
M 113  
1  
—  
2

Jean-Pierre AUBIN

Professeur à l'Université Paris-Dauphine  
Maître de conférences à l'École Polytechnique

### moduleco

Pierre NEPOMIASTCHY  
Ingénieur à l'I.N.R.I.A.



### exercices

Anne-Marie CHARLES  
Maître-Assistant à l'Université Paris-Dauphine

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DU C.N.R.S.

# Dunod

# Plan

## 1ère partie      PROGRAMMATION QUADRATIQUE

1. <u>Rappels d'algèbre linéaire</u>	3
1.1 L'espace $\mathbb{R}^n$	3
1.2 L'espace dual $\mathbb{R}^{n*}$	4
1.3 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	5
1.4 Transposition	8
1.5 Formes bilinéaires	10
1.6 Normes sur $\mathbb{R}^n$	11
1.7 Gradient d'une fonction	14
1.8 Différentiabilité d'une application	
2. <u>Minimisation de la distance à un objectif sous contraintes d'égalité</u>	16
2.1 Produits scalaires	18
2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz	19
2.3 Exemples de produits scalaires	20
2.4 Théorème d'existence et d'unicité de la solution optimale	26
2.5 Un problème de minimisation plus général	30
2.6 Différentiabilité par rapport à l'opérateur des contraintes	32
2.7 Fonctions de demande et classification des biens	36
2.8 Economies d'échange ; construction du prix d'équilibre walrasien	47
3. <u>Inverses à droite et à gauche orthogonaux</u>	54
3.1 Inverse à droite orthogonal	55
3.2 Premier principe de décomposition, production optimale de biens intermédiaires	59
3.3 Inverse à gauche orthogonal	61
3.4 Second principe de décomposition	65
3.5 Troisième principe de décomposition	66
3.6 Quatrième principe de décomposition	67
4. <u>Introduction au contrôle optimal des systèmes discrets</u>	71
4.1 Le problème de contrôle optimal des systèmes linéaires discrets	72
4.2 Le principe de Pontryagine	73
4.3 Calcul du contrôle optimal et de la trajectoire optimale	75
4.4 Interprétation marginale des solutions du système adjoint	78
4.5 Programmation dynamique. Principe d'optimalité	78
5. <u>Algorithmes de simplification de la fonction de perte et de relachement des contraintes</u>	82
5.1 L'algorithme de simplification	83
5.2 Algorithmes de résolution d'équations linéaires (I)	87
5.3 Majoration a posteriori de l'erreur	87

5.4	Décroissance de la distance à l'objectif	89
5.5	Remarques sur le choix du produit scalaire	90
5.6	L'algorithme de prédiction	91
5.7	Algorithmes de décentralisation	93
5.8	L'algorithme de tâtonnement	95
5.9	L'algorithme de synthèse	97
5.10	Une méthode de pénalisation	101

## 2ème partie      PROGRAMMATION CONVEXE

6.	<u>Problèmes de minimisation généraux</u>	107
6.1	Définitions : fonctions indicatrices, épigraphes et sections	107
6.2	Fonctions semi-continues inférieurement	111
6.3	Théorème général d'existence	113
6.4	Fonctions convexes	114
6.5	Le théorème de proximation et le théorème des projections	118
6.6	Théorèmes de séparation	121
7.	<u>Fonctions conjuguées et dualité</u>	125
7.1	Caractérisation des fonctions convexes semi-continues inférieurement	126
7.2	Le théorème de Fenchel	129
7.3	Exemplès : fonctions conjuguées de fonctions quadratiques	133
7.4	Propriétés des fonctions conjuguées	134
7.5	Fonctions d'appui d'ensembles convexes	137
8.	<u>Calcul sous-différentiel</u>	140
8.1	Dérivées à droite de fonctions convexes	142
8.2	Sous-différentiels de fonctions convexes	144
8.3	Sous-différentiels de fonctions convexes continues	145
8.4	Sous-différentiels de fonctions convexes semi-continues inférieurement	146
8.5	Calcul sous-différentiel	148
8.6	Cônes normaux à des ensembles convexes	150
9.	<u>Résolution des problèmes de minimisation convexes</u>	153
9.1	La règle de Fermat	153
9.2	Problèmes quadratiques généraux	159
9.3	Problèmes de minimisation sous contraintes d'égalité	160
9.4	Problèmes de minimisation sous contraintes d'inégalité	161
9.5	Principe de décentralisation par les prix	162

<u>10. Sur l'allocation optimale des ressources</u>	167
10.1 Le problème de l'allocation optimale d'un bien entre n consommateurs	168
10.2 Calcul de l'allocation optimale d'un bien	169
10.3 Le principe de décentralisation par les prix	171
10.4 Interprétation marginale du prix	172
10.5 Optimalité au sens de Pareto	172
10.6 Allocations optimales et allocations d'équilibre walrasien	175
10.7 Algorithme de tâtonnement de Walras	176
10.8 Principe de décentralisation par les ressources	178
10.9 Principe de décentralisation par les ressources et les prix	180
10.10 Calcul des productions et consommations optimales	182
10.11 L'algorithme de synthèse	186
<u>11. Economies d'échange temporelles</u>	188
11.1 Facteurs d'escompte et taux d'intérêt	188
11.2 Consommation et épargne pendant la période initiale	190
11.3 Calcul de la consommation et de l'épargne	193
11.4 Modèle stationnaire de formation de l'épargne	194
11.5 Evolution de l'épargne	196
11.6 Equilibre temporel : formation des taux d'intérêt	198
11.7 Influence de la variation des prévisions de prix sur les facteurs d'actualisation	202
<u>12. Equilibres non coopératifs</u>	204
12.1 Définition des équilibres collectifs non coopératifs	205
12.2 Existence d'équilibres collectifs non coopératifs	207
12.3 Définition des équilibres non coopératifs (de Nash)	210
12.4 Propriétés supplémentaires des équilibres non coopératifs	213
12.5 L'algorithme de simplification dans le cas des jeux non coopératifs	215
12.6 Démonstration de la convergence	217
12.7 Algorithme de résolution d'équations linéaires (II)	220
12.8 Algorithme de tâtonnement dans le cas de jeux non coopératifs	221
<u>13. Modèles de production par maximisation du profit</u>	224
13.1 Le comportement des consommateurs face à la production	225
13.2 Cas de la production par un monopole	226
13.3 Production optimale de biens publics	227
13.4 Cas de la production par un oligopole : équilibre de Walras-Cournot	230
<u>Annexe</u> Présentation du programme "MODULECO"	237

L'auteur expose dans ce livre les grandes idées et les principaux résultats de la **théorie de l'optimisation** dans le cadre le plus général où l'on bénéficie de formules explicites, avant d'exposer la programmation convexe.

Chaque partie de l'ouvrage présente de nombreux exemples économiques. Ce choix permet aux lecteurs, informaticiens, économistes, étudiants dont ceux de mathématiques de la décision, d'aborder la majeure partie de cet ouvrage avec un minimum de bagage mathématique : une certaine familiarité avec l'algèbre linéaire suffit, bien que toutes les notions utilisées soient rappelées.

L'étude de la programmation quadratique privilégiée dans cet ouvrage n'avait pas reçu jusqu'ici toute l'attention qu'elle méritait. Pourtant ces problèmes ont des solutions uniques, calculables explicitement, qui dépendent de façon régulière des paramètres. Une place importante a été réservée aux **algorithmes de résolution** ainsi qu'aux méthodes de **décomposition** et de **décentralisation** qui permettent d'exploiter les formules explicites en fonction de la structure des problèmes. La théorie des jeux non coopératifs à plusieurs joueurs est même abordée dans ce cadre.

Ce livre est donc un complément indispensable à tout ouvrage traitant de la programmation linéaire.

*PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DU C.N.R.S.*



9 782040 154028



ISBN 2-04-015402-7

F200/82-06