

Laurent Schwartz

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

 Hermann

**Laurent Schwartz**

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

# Théorie des distributions

NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT CORRIGÉE, REFONDUE ET AUGMENTÉE

1. UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FONCTION : LA NOTION DE DISTRIBUTION	14
Notations	15
Exemples	15
Fonctions et mesures	17
Réstriction à un ouvert	17
2. DÉTERMINATION DES PROPRIÉTÉS DE MESURE DES DISTRIBUTIONS	20
Dualité	20
L'aspect (D)	21
Partitions de l'unité	22
Les distributions	24
Distributions et mesures	25
3. PRINCIPES DE LOCALISATION. SUPPORT D'UNE DISTRIBUTION	26
Distribution nulle dans un ouvert	26
Principe du recollement des morceaux	27
Support d'une distribution	28
4. DISTRIBUTIONS POSITIVES	28
DISTRIBUTIONS DIVERSES	30
Distributions vectorielles	30
Distributions sur une variété différentiable	31

M 1111

1313

$\frac{1}{1}$



**Hermann**

## TABLE

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>3</b>
 <b>CHAPITRE I DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES</b>  	
<i>Sommaire</i> .....	<b>13</b>
§ 1. UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE FONCTION : LA NOTION DE MESURE .....	<b>14</b>
Notations.....	14
Mesures .....	15
Supports .....	17
Fonctions et mesures.....	17
Restriction à un ouvert.....	19
§ 2. GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE MESURE. LES DISTRIBUTIONS... ..	<b>20</b>
Doublet .....	20
L'espace $(\mathcal{D})$ .....	21
Partition de l'unité.....	22
Les distributions.....	24
Distributions et mesures.....	25
§ 3. PRINCIPE DE LOCALISATION. SUPPORT D'UNE DISTRIBUTION .....	<b>26</b>
Distribution nulle dans un ouvert.....	26
Principe du recollement des morceaux.....	27
Support d'une distribution.....	28
§ 4. DISTRIBUTIONS POSITIVES.....	<b>28</b>
§ 5. GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.....	<b>30</b>
Distributions vectorielles.....	30
Distributions sur une variété indéfiniment différentiable.....	31
 <b>CHAPITRE II DÉRIVATION</b>  	
<i>Sommaire</i> .....	<b>33</b>
§ 1. DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE.....	<b>34</b>
Dérivée d'une fonction régulière.....	34
Dérivée d'une distribution.....	35

§ 2. EXEMPLES DE DÉRIVATION. CAS D'UNE VARIABLE ( $n = 1$ ).....	36
Fonctions discontinues. Dérivées successives de la fonction d'Heaviside $Y(x)$ .....	36
Dérivées successives d'une fonction régulière par morceaux...	37
Pseudo-fonctions. Parties finies de Hadamard.....	38
Pseudo-fonctions monômes.....	41
§ 3. EXEMPLES DE DÉRIVATION. CAS DE PLUSIEURS VARIABLES.....	43
Fonctions discontinues sur une surface.....	43
Fonctions de la distance.....	44
Fonctions méromorphes.....	48
Distances hyperboliques.....	49
Dérivations sur une variété.....	51
§ 4. PRIMITIVES DES DISTRIBUTIONS. CAS D'UNE VARIABLE.....	51
Primitives d'une distribution.....	51
Primitives d'une mesure.....	53
§ 5. PRIMITIVES DES DISTRIBUTIONS. CAS DE PLUSIEURS VARIABLES.....	54
Distribution indépendante de $x_1$ .....	55
Recherche des primitives.....	56
Fonctions ayant pour dérivée une fonction.....	57
§ 6. DISTRIBUTIONS DONT ON CONNAIT PLUSIEURS DÉRIVÉES PARTIELLES.	59
Distributions dont les dérivées sont des fonctions continues...	61

### CHAPITRE III ESPACES TOPOLOGIQUES DE DISTRIBUTIONS STRUCTURE DES DISTRIBUTIONS

<i>Sommaire</i> .....	63
§ 1. L'ESPACE TOPOLOGIQUE $(\mathcal{D})$ .....	64
La topologie des $(\mathcal{D}_K)$ .....	64
La topologie de $(\mathcal{D})$ .....	65
Rapports entre les topologies des $(\mathcal{D}_K)$ et la topologie de $(\mathcal{D})$ ...	66
§ 2. LES ENSEMBLES BORNÉS DANS $(\mathcal{D})$ .....	68
Topologie d'un dual.....	68
Ensembles bornés dans $(\mathcal{D})$ .....	69
Ensembles bornés et ensembles compacts.....	70
§ 3. L'ESPACE TOPOLOGIQUE $(\mathcal{D}')$ DES DISTRIBUTIONS.....	71
Convergence dans $(\mathcal{D}')$ .....	71
Propriétés de la topologie.....	71
Ensembles bornés et ensembles compacts dans $(\mathcal{D}')$ ; réflexivité	74
Un théorème d'approximation.....	75
Un critère de convergence.....	75
§ 4. DÉFINITION TOPOLOGIQUE DE LA DÉRIVATION.....	77

Dérivées premières.....	77
Dérivées d'ordre quelconque.....	78
Fonctions monotones.....	79
§ 5. LA DÉRIVATION, OPÉRATION LINÉAIRE CONTINUE.....	80
Continuité de la dérivation.....	80
Critère de convergence.....	81
§ 6. STRUCTURE LOCALE D'UNE DISTRIBUTION.....	82
Distributions et dérivées des fonctions continues.....	82
Ensembles bornés de distributions.....	85
Suites convergentes de distributions.....	86
§ 7. DISTRIBUTIONS A SUPPORT COMPACT.....	87
Définition de $T(\varphi)$ lorsque $\varphi$ a un support quelconque.....	87
Espaces $(\mathcal{E})$ , $(\mathcal{E}')$ .....	88
Dualité entre $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ .....	89
Structure d'une distribution à support compact.....	90
§ 8. STRUCTURE GLOBALE D'UNE DISTRIBUTION.....	95
§ 9. SUPPORTS RÉGULIERS.....	98
§ 10. STRUCTURE DES DISTRIBUTIONS DONT LE SUPPORT EST CONTENU DANS UNE SOUS-VARIÉTÉ.....	100
Distributions à support ponctuel.....	100
Distributions dont le support est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ .....	100
Distributions portées par une sous-variété indéfiniment diffé- rentiable $U^h$ régulièrement plongée dans une variété indéfi- niment différentiable $V^n$ .....	102

#### CHAPITRE IV PRODUITS TENSORIELS DE DISTRIBUTIONS

<i>Sommaire</i> .....	104
§ 1. INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE.....	104
Position du problème.....	104
Continuité par rapport au paramètre.....	105
Différentiabilité.....	105
§ 2. PRODUIT TENSORIEL DE 2 DISTRIBUTIONS.....	106
§ 3. UNICITÉ, EXISTENCE, CALCUL DU PRODUIT TENSORIEL.....	108
Un théorème d'approximation. Unicité du produit tensoriel... ..	108
Existence et calcul du produit tensoriel.....	109
§ 4. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT TENSORIEL.....	110
Support.....	110
Continuité.....	110
Dérivation.....	112
Un théorème d'approximation.....	112

§ 5. EXEMPLES .....	113
Distributions indépendantes de $x_1$ .....	113
Extension à l'espace d'une distribution définie sur un sous-espace vectoriel .....	114
Fonctions d'Heaviside et mesures de Dirac .....	114

## CHAPITRE V MULTIPLICATION DES DISTRIBUTIONS

<i>Sommaire</i> .....	116
§ 1. PRODUIT MULTIPLICATIF D'UNE DISTRIBUTION PAR UNE FONCTION INDÉFINIMENT DÉRIVABLE .....	117
Impossibilité de définir le produit de 2 distributions quelconques .....	117
Définition .....	117
§ 2. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT MULTIPLICATIF .....	118
Support. Ordre .....	118
Continuité .....	119
Dérivation .....	120
Produit tensoriel et produit multiplicatif .....	120
Produit de plusieurs distributions .....	120
§ 3. EXEMPLES .....	121
§ 4. PROBLÈME DE LA DIVISION, CAS D'UNE VARIABLE ( $n = 1$ ) .....	123
Position du problème .....	123
Division par $x$ .....	123
Division par $x^l$ .....	125
Division par une fonction $H$ .....	125
§ 5. ESQUISSE DU PROBLÈME DE LA DIVISION DANS LE CAS DE PLUSIEURS VARIABLES .....	126
§ 6. APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES .....	128
Définition .....	128
Équations différentielles .....	130
Une propriété des solutions des équations aux dérivées partielles .....	132
Problème de Cauchy .....	133
Solution élémentaire .....	135
Noyau élémentaire .....	138
Régularité des solutions des systèmes elliptiques .....	142

## CHAPITRE VI PRODUIT DE CONVOLUTION

<i>Sommaire</i> .....	149
§ 1. DÉFINITION DU PRODUIT DE CONVOLUTION USUEL .....	150
Produit de convolution de deux fonctions .....	150
Convolution d'une fonction et d'une mesure .....	152
Convolution de deux mesures .....	152

§ 2. PRODUIT DE CONVOLUTION DE DEUX DISTRIBUTIONS SUR $\mathbb{R}^n$ .....	153
Définition fonctionnelle. Cas de 2 fonctions .....	153
Cas de 2 distributions .....	154
Restriction sur les supports .....	154
Existence et calcul .....	155
§ 3. PROPRIÉTÉS DU PRODUIT DE CONVOLUTION .....	156
Support .....	156
Continuité .....	157
Produit de convolution et produit tensoriel .....	158
Associativité, commutativité .....	158
Convolution, translation, dérivation .....	159
Convolution, combinaison de translations .....	161
Opérations permutant avec les dérivations .....	162
Polynomes de dérivation .....	164
§ 4. RÉGULARISATION DES DISTRIBUTIONS .....	165
Définition .....	165
Continuité .....	167
Produit scalaire et trace du produit de convolution .....	167
Formules .....	169
§ 5. PRODUIT DE CONVOLUTION DANS LE CAS DE SUPPORTS NON COMPACTS. ....	170
Définition et propriétés .....	170
Commutativité, associativité .....	170
Les opérations du calcul symbolique à une variable ( $n = 1$ ) ..	171
Application : dérivation d'ordre non entier .....	174
Les opérations du calcul symbolique à plusieurs variables .....	176
§ 6. APPLICATION DU PRODUIT DE CONVOLUTION A L'ÉTUDE DE L'INTÉ- GRATION .....	180
Application à la recherche des primitives .....	180
Distributions dont les dérivées premières sont des mesures .....	181
Conditions de Lipschitz .....	185
Dérivées d'ordre supérieur .....	188
Problèmes posés .....	191
§ 7. APPLICATION DU PRODUIT DE CONVOLUTION A L'ÉTUDE DE LA RÉGU- LARITÉ D'UNE DISTRIBUTION OU D'UNE FAMILLE DE DISTRIBUTIONS ....	192
Caractérisation des mesures et des distributions d'ordre fini ..	192
Remarques et conséquences .....	193
Ensembles bornés de distributions .....	194
Suites convergentes de distributions .....	197
Application : caractérisation des fonctions analytiques .....	198
§ 8. NOUVEAUX ESPACES DE DISTRIBUTIONS, LES $(\mathcal{D}'_{L_n})$ .....	199
Les espaces $(\mathcal{D}_{L_n})$ .....	199
Les espaces de distributions $(\mathcal{D}'_{L_n})$ .....	200

Caractérisation des distributions de $(\mathcal{D}'_{L_n})$ .....	201
Remarques .....	202
Dualité entre $(\mathfrak{B})$ et $(\mathcal{D}'_{L_n})$ .....	202
Multiplication et convolution dans les $(\mathcal{D}'_{L_n})$ .....	203
Autre définition des distributions bornées. Extensions .....	205
<b>§ 9. DISTRIBUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES</b> .....	206
Définition .....	206
Opérations et propriétés.....	206
Moyennes et convolution .....	207
Développement de Fourier.....	208
<b>§ 10. APPLICATION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES</b> .....	208
Équations de convolution.....	208
Propriétés générales des solutions des équations de convolution .....	210
Solution élémentaire .....	210
Utilisation de la solution élémentaire.....	211
Potentiels newtoniens. Formule de Poisson.....	214
Analyticité des solutions des systèmes elliptiques homogènes .....	215
Cas particuliers : fonctions harmoniques et holomorphes.....	216
Inéquations de convolution. Formule de décomposition de F. Riesz .....	218
Applications aux fonctions surharmoniques.....	220
Remarques et généralisations.....	221

## CHAPITRE VII TRANSFORMATION DE FOURIER

<i>Sommaire</i> .....	223
<b>§ 1. SÉRIES DE FOURIER</b> .....	224
Distributions sur le tore.....	224
Série de Fourier.....	225
Exemples et applications. 1° Séries de Fourier des fonctions elliptiques .....	228
2° Équations aux différences finies.....	228
Distributions sur le tore et distributions périodiques sur $\mathbb{R}^n$ .....	229
<b>§ 2. LA TRANSFORMATION DE FOURIER USUELLE DANS L'ESPACE A <math>n</math> DIMENSIONS</b> .....	231
Transformation de Fourier usuelle.....	231
Cas des distributions.....	232
<b>§ 3. L'ESPACE <math>(\mathcal{S})</math> DES FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES A DÉCROISSANCE RAPIDE SUR <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	233
L'espace $(\mathcal{S})$ .....	233
Interprétation géométrique.....	235

§ 4. L'ESPACE $(\mathcal{G})$ DES DISTRIBUTIONS A CROISSANCE LENTE OU TEM- PÉRÉES.....	237
$(\mathcal{G})$ , dual de $(\mathcal{G})$ .....	237
Interprétation géométrique de $(\mathcal{G})$ .....	238
Caractérisation des distributions tempérées par leur crois- sance.....	239
Mesures positives tempérées.....	241
Un théorème de prolongement.....	243
§ 5. OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES DANS L'ESPACE $(\mathcal{G})$ DES DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES.....	243
Les fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente, l'espace $(\mathcal{O}_M)$ .....	243
Les distributions à décroissance rapide, l'espace $(\mathcal{O}'_0)$ .....	244
Remarque importante.....	244
La multiplication dans $(\mathcal{G})$ .....	245
La convolution dans $(\mathcal{G})$ .....	246
§ 6. TRANSFORMATION DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES.....	248
Transformation de Fourier et automorphismes de $X^n$ et $Y^n$ ...	251
Remarque.....	252
§ 7. EXEMPLES.....	253
Exemple 1.....	253
Exemple 2. Série et intégrale de Fourier.....	253
Exemple 3. Transformée de Fourier d'une mesure.....	254
Exemple 4. Transformation de Fourier dans les $(\mathcal{D}'_{L_n})$ .....	256
Exemple 5. Fonctions de la distance.....	257
Exemple 6. Fonctions méromorphes.....	260
Exemple 7. Transformation de Fourier des Polynomes d'Her- mite.....	260
Exemple 8. Distances hyperboliques.....	263
Exemple 9. Un calcul par intégrations successives.....	266
§ 8. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER.....	268
Produits directs.....	268
Multiplication et convolution.....	268
Exemples.....	270
Distributions à spectre compact. Théorème de Paley-Wiener généralisé.....	271
§ 9. DISTRIBUTIONS DE TYPE POSITIF.....	274
Fonctions $\gg 0$ .....	274
Distributions $\gg 0$ .....	275
Distributions $\gg 0$ et mesures $\gg 0$ .....	276
Opérations sur les distributions $\gg 0$ .....	277
Structure des distributions $\gg 0$ .....	279
Exemples.....	280

§ 10. APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES..... 281

Transformation de Fourier des équations de convolution..... 282

Équations de convolution homogènes..... 282

Recherche d'une solution élémentaire..... 286

Exemple 1. Équations elliptiques..... 286

Exemple 2. Équations de Laplace itérées..... 288

Exemple 3. Équation de la chaleur itérée..... 288

Exemple 4. Équations hyperboliques..... 290

Exemple 5. Équations intégrales..... 291

Exemple 6. .... 292

Exemple 7. Théorème de Fredholm..... 293

Résolution d'équations avec seconds membres tempérés quelconques ..... 296

Exemple 1..... 296

Exemple 2. .... 296

Conséquences de la solution du problème de la division..... 298

CHAPITRE VIII TRANSFORMATION DE LAPLACE

Sommaire ..... 299

§ 1. PRODUITS D'UNE DISTRIBUTION PAR DES EXPONENTIELLES..... 300

§ 2. L'ESPACE DE DISTRIBUTIONS  $\mathcal{D}'_x(\Gamma)$  ASSOCIÉ A UN ENSEMBLE CONVEXE NON VIDE  $\Gamma$  DE  $\mathbb{E}^n$ ..... 303

§ 3. TRANSFORMATION DE LAPLACE SUR  $\mathcal{D}'_x(\Gamma)$ ..... 305

REMARQUES DIVERSES..... 307

§ 4. Étude de support d'une distribution à partir de sa transformée de Laplace ..... 308

CHAPITRE IX COURANTS SUR UNE VARIÉTÉ

Sommaire ..... 312

§ 1. FORMES PAIRES ET IMPAIRES SUR UNE VARIÉTÉ INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLE ..... 313

Formes ordinaires ou paires ..... 313

Formes impaires ou tordues..... 315

Formes paires et impaires sur une variété orientée..... 317

Produits extérieurs de formes..... 318

Formes sur  $\mathbb{R}^n$ ..... 318

Image réciproque d'une forme..... 320

Cohomologie des formes  $C^\infty$ ..... 321

§ 2. COURANTS PAIRS ET IMPAIRS SUR UNE VARIÉTÉ ..... 322

Courants ..... 322

Exemples ..... 323

TABLE

Courants $\geq 0$ .....	337
Courants pairs et impairs sur une variété orientée.....	337
Courants et distributions.....	338
Sections-distributions d'un espace fibré à fibres vectorielles ...	339
<b>§ 3. OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES COURANTS.....</b>	<b>341</b>
Première opération : produit extérieur d'un courant par une forme $C^\infty$ .....	341
Deuxième opération : multiplication intérieure par un champ $C_\infty$ de multivecteurs .....	343
Troisième opération : cobord d'un courant.....	343
Cobord d'un courant sur une variété $V$ avec bord.....	350
Quatrième opération : dérivation d'un courant par une transformation infinitésimale.....	351
Théorèmes de de Rham en cohomologie.....	353
<b>§ 4. IMAGE DIRECTE D'UN COURANT PAR UNE APPLICATION <math>C^\infty</math>.....</b>	<b>362</b>
Cas de variétés orientées.....	369
Cas d'un difféomorphisme. Transport de structure.....	370
<b>§ 5. CHANGEMENT DE VARIABLES. IMAGES RÉCIPROQUES DE COURANTS... 373</b>	<b>373</b>
Changements de variables.....	373
Image directe des formes impaires indéfiniment différentiables.....	374
Image réciproque des courants pairs.....	374
Propriétés élémentaires de l'image réciproque : transitive, support, multiplication, cobord.....	375
Cas où $H$ est un difféomorphisme local.....	378
Image réciproque des courants dans le cas d'une application de rang $n$ de $V^n$ dans $V^n$ .....	390
Applications et exemples.....	391
<b>§ 6. TRANSFORMATION DE FOURIER DES COURANTS TEMPÉRÉS SUR UN ESPACE VECTORIEL DE DIMENSION FINIE .....</b>	<b>396</b>
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE .....	401
INDEX TERMINOLOGIQUE.....	415
INDEX DES NOTATIONS.....	419

d'Heaviside  $\gamma$  ( $\gamma$  égal à  $\epsilon$  pour  $x < 0$  et à  $1$  pour  $x > 0$  et pour dérivée la fonction de Dirac  $\delta(x)$  dont la définition même est mathématiquement contradictoire, et parler des dérivées  $\gamma'(x)$ ,  $\delta'(x)$ ... de cette fonction demande d'existence réelle,  $\gamma$  est dépasser les limites qui nous sont permises. Comment expliquer le succès de ces méthodes? Quand une telle situation contradictoire se présente, il est bien rare qu'il n'en résulte pas une théorie mathématique

(\*) Heaviside (1)  
 (\*\*) Dirac (1)

---

---

Ce traité des distributions a marqué une date dans le progrès des mathématiques et de la physique en levant l'ambiguïté que constituaient le succès des méthodes de calcul symbolique auprès des physiciens et l'inacceptabilité de leurs formules au regard de la rigueur mathématique.

Le mérite revient à Laurent Schwartz d'avoir englobé, dans une théorie qui est à la fois une synthèse et une simplification, des procédés hétérogènes et souvent incorrects utilisés dans des domaines très divers.

Une définition correcte et une étude systématique de ces êtres nouveaux, les distributions, leur ont donné droit de cité dans l'usage courant et leur utilisation extensive dans de nombreuses branches des mathématiques pures et appliquées, de la physique et des sciences de l'ingénieur ont fait de ce livre un classique des mathématiques modernes.

---

---

