

V. SMIRNOV

**COURS
de
MATHÉMATIQUES
SUPÉRIEURES**

tome III
deuxième partie



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)

V. SMIRNOV

TABLE DES MATIÈRES

M 108
I 922 1/10

COURS de MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

tome III

deuxième partie



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

1, Place Centrale de Ben Aknoun (Alger)

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 9

CHAPITRE PREMIER. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

I-1. Fonctions de variable complexe (11). I-2. Dérivée (17). I-3. Transformation conforme (23). I-4. Intégrale (27). I-5. Théorème de Cauchy (30). I-6. Formule fondamentale du calcul intégral (33). I-7. Formule de Cauchy (37). I-8. Intégrales du type Cauchy (42). I-9. Corollaires de la formule de Cauchy (45). I-10. Points singuliers isolés (47). I-11. Séries infinies à termes complexes (50). I-12. Théorème de Weierstrass (53). I-13. Séries entières (55). I-14. Série de Taylor (58). I-15. Série de Laurent (61). I-16. Exemples (64). I-17. Points singuliers isolés. Point à l'infini (69). I-18. Prolongement analytique (74). I-19. Exemples de fonctions multiformes (82). I-20. Points singuliers des fonctions analytiques et surfaces de Riemann (91). I-21. Théorème des résidus (95). I-22. Théorèmes sur le nombre de racines (98). I-23. Inversion d'une série entière (102). I-24. Principe de symétrie (106). I-25. Série de Taylor sur la circonférence du cercle de convergence (110). I-26. Compléments sur la formule de Cauchy (112). I-27. Valeur principale de l'intégrale (115). I-28. Valeur principale de l'intégrale (suite) (119). I-29. Intégrales du type Cauchy (124). I-30. Intégrales du type Cauchy (suite) (130).

CHAPITRE II. TRANSFORMATION CONFORME ET CHAMP PLAN

II-1. Transformation conforme (134). II-2. Transformation linéaire (134). II-3. Transformation homographique (136). II-4. La fonction $w = z^2$ (146). II-5. La fonction $w = \frac{k}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ (147). II-6. Domaine limité par deux arcs de cercle et bande (151). II-7. Théorème fondamental (153). II-8. Formule de Christoffel (156). II-9. Cas particuliers (161). II-10. Cas de l'extérieur du polygone (165). II-11. Propriété de minimum de la transformation sur un cercle (167). II-12. Méthode des séries trigonométriques conjuguées (170). II-13. Ecoulement plan stationnaire d'un fluide (174). II-14. Exemples (176). II-15. Ecoulement complet autour d'un obstacle (180). II-16. Formule de Joukowski (181). II-17. Problème plan de l'électrostatique (183). II-18. Formule de Schwarz (186).

II-19. Noyau $\text{ctg} \frac{s-t}{2}$ (188). II-20. Problèmes aux limites (193). II-21. Equation biharmonique (197). II-22. Equation d'onde et fonctions analytiques (200). II-23. Théorème fondamental (202). II-24. Diffraction d'une onde plane (209). II-25. Réflexion des ondes élastiques sur une frontière rectiligne (213).

CHAPITRE III. APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RÉSIDUS. FONCTIONS ENTIÈRES ET RATIONNELLES

III-1. Intégrale de Fresnel (219). III-2. Intégration d'expressions renfermant des fonctions trigonométriques (221). III-3. Intégration d'une fraction rationnelle (223). III-4. Quelques nouveaux types d'intégrales contenant des fonctions trigonométriques (224). III-5. Lemme de Jordan (227). III-6. Représentation de certaines fonctions par des intégrales curvilignes (230). III-7. Exemples d'intégrales de fonctions multiformes (234). III-8. Intégration d'un système d'équations linéaires à coefficients constants (238). III-9. Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples (243). III-10. Fonction $\text{ctg} z$ (247). III-11. Construction d'une fonction méromorphe (249). III-12. Fonctions entières (251). III-13. Produits infinis (253). III-14. Construction d'une fonction entière d'après ses racines (256). III-15. Intégrales dépendant d'un paramètre (260). III-16. Intégrale eulérienne de seconde espèce (263). III-17. Intégrale eulérienne de première espèce (268). III-18. Produit infini pour la fonction $[\Gamma(z)]^{-1}$ (269). III-19. Représentation de $\Gamma(z)$ par une intégrale curviligne (275). III-20. Formule de Stirling (278). III-21. Formule de sommation d'Euler (284). III-22. Nombres de Bernoulli (288). III-23. Méthode du col (289). III-24. Développement asymptotique d'une intégrale (291). III-25. Exemples (297). III-26. Méthode de phase stationnaire (302).

CHAPITRE IV. FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES ET FONCTIONS DE MATRICES

IV-1. Fonctions régulières de plusieurs variables (305). IV-2. Intégrale double et formule de Cauchy (307). IV-3. Séries entières (310). IV-4. Prolongement analytique (316). IV-5. Fonctions de matrices. Notions préliminaires (317). IV-6. Séries entières d'une matrice (318). IV-7. Produit de séries entières. Inversion d'une série entière (322). IV-8. Etude ultérieure de la convergence (325). IV-9. Polynômes d'interpolation (330). IV-10. Identité de Cayley. Formule de Sylvester (331). IV-11. Détermination de la fonction d'une matrice par la formule de Cauchy (334). IV-12. Prolongement analytique (337). IV-13. Logarithme d'une matrice (342). IV-14. Inversion d'une fonction entière de matrice dans le cas d'une matrice du second ordre (343). IV-15. Systèmes d'équations linéaires à coefficients constants (346). IV-16. Fonctions de plusieurs matrices (351).

CHAPITRE V. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

V-1. Développement de la solution en série entière (354). V-2. Prolongement analytique de la solution (359). V-3. Voisinage d'un point singulier (360). V-4. Point singulier régulier (366). V-5. Equations de la classe de Fuchs (373). V-6. Equation de Gauss (377). V-7. Série hypergéométrique (379). V-8. Polynômes de Legendre (384). V-9. Polynômes de Jacobi (391). V-10. Transformation conforme et équation de Gauss (396). V-11.

Transformation de Laplace (400). V-12. Choix de solutions (402). V-13. Equation de Bessel (406). V-14. Fonctions de Hankel et représentation intégrale des solutions de l'équation de Bessel (409). V-15. Développements asymptotiques (413). V-16. Développements asymptotiques des solutions obtenues par la transformation de Laplace (418). V-17. Développements asymptotiques des solutions de l'équation de Bessel (423). V-18. Dégénération de l'équation de Gauss (428). V-19. Séries formelles au voisinage du point singulier irrégulier (428). V-20. Construction de développements asymptotiques par la méthode d'approximations successives (432). V-21. Fonctions d'Airy (437). V-22. Développement asymptotique pour les grandes valeurs du paramètre (441). V-23. Equations à coefficients périodiques (448). V-24. Conditions de stabilité et d'instabilité pour l'équation de Hill (453). V-25. Systèmes d'équations différentielles linéaires (462). V-26. Point singulier régulier (465). V-27. Systèmes réguliers (468). V-28. Représentation de la solution au voisinage d'un point singulier (475). V-29. Solutions canoniques (478). V-30. Lién avec les solutions régulières du type de Fuchs (481). V-31. Cas de U_s arbitraires (482). V-32. Développements formels au voisinage d'un point singulier irrégulier (485).

CHAPITRE VI. FONCTIONS SPÉCIALES

§ 1. Fonctions sphériques et fonctions de Legendre 489

VI-1-1. Définition des fonctions sphériques (489). VI-1-2. Expressions explicites des fonctions sphériques (492). VI-1-3. Orthogonalité (496). VI-1-4. Polynômes de Legendre (500). VI-1-5. Développement suivant les fonctions sphériques (505). VI-1-6. Démonstration de la convergence (509). VI-1-7. Les fonctions sphériques et les problèmes aux limites (511). VI-1-8. Problèmes de Dirichlet et de Neumann (514). VI-1-9. Potentiel des masses volumiques (516). VI-1-10. Potentiel d'une couche sphérique (518). VI-1-11. L'électron dans un champ central (521). VI-1-12. Fonctions sphériques et représentations linéaires du groupe des rotations (524). VI-1-13. Fonction de Legendre (525). VI-1-14. Fonction de Legendre de deuxième espèce (528).

§ 2. Fonctions de Bessel 532

VI-2-1. Définition des fonctions de Bessel (532). VI-2-2. Relations entre les fonctions de Bessel (534). VI-2-3. L'orthogonalité des fonctions de Bessel et leurs racines (537). VI-2-4. Fonction génératrice et représentation intégrale (543). VI-2-5. Formule de Fourier-Bessel (547). VI-2-6. Fonctions de Hankel et de Neumann (548). VI-2-7. Développement des fonctions de Neumann d'indice entier (554). VI-2-8. Cas de l'argument purement imaginaire (556). VI-2-9. Nouvelles représentations intégrales (558). VI-2-10. Représentations asymptotiques (560). VI-2-11. Fonctions de Bessel et équation de Laplace (565). VI-2-12. Equation d'onde en coordonnées cylindriques (567). VI-2-13. Equation d'onde en coordonnées sphériques (571).

§ 3. Polynômes d'Hermite et de Laguerre 574

VI-3-1. Oscillateur linéaire et polynômes d'Hermite (574). VI-3-2. Orthogonalité (578). VI-3-3. Fonction génératrice (579). VI-3-4. Coordonnées paraboliques et fonctions d'Hermite (581). VI-3-5. Polynômes de

Laguerre (583). VI-3-6. Lien entre les polynômes d'Hermite et de Laguerre (590). VI-3-7. Expression asymptotique des polynômes d'Hermite (591). VI-3-8. Expression asymptotique des polynômes de Legendre (594).

§ 4. Intégrales elliptiques et fonctions elliptiques 598

VI-4-1. Réduction des intégrales elliptiques à la forme normale (598).
 VI-4-2. Réduction des intégrales à la forme trigonométrique (602). VI-4-3. Exemples (606). VI-4-4. Inversion de l'intégrale elliptique (608). VI-4-5. Propriétés générales des fonctions elliptiques (612). VI-4-6. Lemme fondamental (616). VI-4-7. Fonctions de Weierstrass (618). VI-4-8. Equation différentielle pour $\wp(u)$ (623). VI-4-9. Fonctions $\sigma_k(u)$ (626). VI-4-10. Développement d'une fonction entière périodique (630). VI-4-11. Nouvelles notations (631). VI-4-12. La fonction $\vartheta_1(v)$ (633). VI-4-13. Fonctions $\vartheta_k(v)$ (636). VI-4-14. Propriétés des fonctions thêta (639). VI-4-15. Expression des nombres e_k en fonction de ϑ_k (642). VI-4-16. Fonctions elliptiques de Jacobi (645). VI-4-17. Propriétés principales des fonctions de Jacobi (647). VI-4-18. Equations différentielles pour les fonctions de Jacobi (648). VI-4-19. Formules d'addition (650). VI-4-20. Relation entre les fonctions $\wp(u)$ et $\operatorname{sn}(u)$ (651). VI-4-21. Coordonnées elliptiques (653). VI-4-22. Introduction des fonctions elliptiques (655). VI-4-23. Equation de Lamé (657). VI-4-24. Pendule simple (659). VI-4-25. Exemple de transformation conforme (661).

Annexe. Réduction des matrices à la forme canonique	664
1. Propositions auxiliaires	664
2. Cas des racines simples	669
3. Première étape des transformations dans le cas des racines multiples	671
4. Réduction à la forme canonique	675
5. Détermination de la structure de la forme canonique	681
6. Exemple	685
Index	692