

CLD 511.5

M 1088

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique  
Agence Thématique de Recherche en Sciences et Technologie



Cours de référence universitaire  
Deuxième (2<sup>ème</sup>) année

069394



5

# Théorie des graphes

Auteur : BOUANANE Khadra

Université Kasdi Merbah de Ouargla



ديوان المطبوعات الجامعية  
University Publications Office  
٠٤٠٠ | +٠٨٨٠٢٤١ +٤٠٨٠٤٤٤٤



@Office des Publications Universitaires : 12-2024

ÉDITION : 2-08-6332

I.S.B.N : 978-9961-0-2515-4

Dépôt légal : 12-2024

## TABLE DES MATIÈRES



<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 Définitions de base</b>	<b>7</b>
1 Définition intuitive d'un graphe . . . . .	7
2 Définition mathématique d'un graphe . . . . .	8
3 Ordre, orientation et multiplicité . . . . .	8
4 Relations entre les éléments d'un graphe . . . . .	11
5 Matrices associées à un graphe . . . . .	17
6 Vocabulaire lié à la connexité . . . . .	22
7 Exercices . . . . .	32
<b>2 Cycles</b>	<b>37</b>
1 Nombre cyclomatique et cocyclomatique . . . . .	37
2 Planarité . . . . .	45
3 Arbres, forêts et arborescences . . . . .	49
4 Exercices . . . . .	55
<b>3 Flots</b>	<b>57</b>
1 Définitions . . . . .	57
2 Recherche d'un flot maximum dans un réseau de transport . . . . .	58
3 Recherche de flot compatible . . . . .	63
4 Exercices . . . . .	66
<b>4 Problèmes de Cheminement</b>	<b>69</b>
1 Recherche de composantes connexes . . . . .	69
2 Recherche du plus court chemin . . . . .	72
3 Problème de recherche d'un arbre couvrant de poids minimum . . . . .	85
4 Exercices . . . . .	89

**TABLE DES MATIÈRES**

4

<b>5 Problèmes de cheminements Hamiltoniens et Eulériens</b>	<b>97</b>
1 Problème de cheminements Hamiltoniens	97
2 Problème de cheminements Eulériens	102
3 Exercices	106
<b>6 Coloration</b>	<b>109</b>
1 Définitions	109
2 Coloration de sommets	115
3 Coloration des arêtes	117
4 Propositions	118
5 Le théorème des 4 couleurs	120
6 Graphes parfaits	121
7 Exercices	123
<b>A Correction des exercices</b>	<b>127</b>
1 Exercices du Chapitre 1	127
2 Exercices du Chapitre 2	131
3 Exercices du Chapitre 3	135
4 Exercices du Chapitre 4	139
5 Exercices du Chapitre 5	145
6 Exercices du Chapitre 6	146
<b>B Implémentation de quelques algorithmes en langage C</b>	<b>151</b>
1 Algorithme de Ford-Fulkerson pour la recherche d'un flot maximum	151
2 Algorithme de recherche de flot compatible	152
3 Algorithme de Trémaux pour la recherche des composantes connexes d'un graphe	155
4 Algorithme de Tarjan pour la recherche des composantes fortement connexes d'un graphe	156
5 Algorithme de Bellman pour la recherche des plus courts chemins dans les réseaux sans circuits	157
6 Algorithme de Moore-Dijkstra pour la recherche des plus courts chemins dans un réseau avec longueurs d'arcs positives	158
7 Algorithme de Calcul du calendrier des dates au plus tôt et des dates au plus tard dans un réseau potentiel-tâches	160
8 Algorithme de Calcul du calendrier des dates au plus tôt et des dates au plus tard dans un réseau potentiel-étapes (PERT)	161
9 Algorithme de Kruskal pour la recherche d'une arbre couvrant de poids minimum	162
10 Algorithme de Prim pour la recherche d'un arbre couvrant de poids minimum	164
11 Algorithme de Fleury pour la recherche d'un cycle Eulérien	165
<b>Résumé</b>	<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>168</b>

**INTRODUCTION**

Dans son ouvrage "Graph Theory", publié en 1969, Frank Harary avait anticipé le formidable essor qu'allait connaître le domaine de la théorie des graphes au fil des années. Il avait prédit que chaque notion exposée dans les différents chapitres nécessiterait éventuellement un livre dédié, une prédiction qui s'est avérée exacte.

L'expansion remarquable de la théorie des graphes au cours des dernières décennies ne peut être décrite que comme phénoménale. Depuis la résolution du problème des "sept ponts de Königsberg" par Leonhard Euler, ce domaine s'est imposé comme un fondement essentiel pour diverses disciplines telles que la recherche opérationnelle, l'informatique, la chimie, la biologie, les sciences sociales, etc.

Les graphes, simples dans leur définition de points et de lignes, sont devenus des outils indispensables pour la modélisation, faisant de la théorie des graphes un pilier incontournable de l'informatique. Cette discipline fournit une panoplie d'algorithmes permettant de résoudre des problèmes complexes à grande échelle, impliquant parfois plusieurs centaines, voire milliers, de sommets et de relations. Ainsi, ses outils sont couramment utilisés pour la recherche des plus courts chemins dans les réseaux de communication, dans l'optimisation des requêtes dans les bases de données, ou encore dans la planification des tâches dans les systèmes d'exploitation.

De plus, avec l'émergence de l'intelligence artificielle, la théorie des graphes a trouvé de nouvelles applications. Par exemple, elle est utilisée dans les réseaux de neurones graphiques pour la modélisation de données structurées, dans l'apprentissage par renforcement pour la modélisation de l'environnement d'un agent, ou encore dans le traitement du langage naturel pour la représentation sémantique des textes.

Cet ouvrage, destiné aux étudiants en licence d'informatique, propose une introduction concise à la théorie et aux algorithmes des graphes. Son objectif est d'initier les étudiants au langage de la théorie des graphes, de les familiariser avec la modélisation de situations concrètes sous forme de graphes, et de leur enseigner les techniques et algorithmes appropriés pour résoudre des problèmes réels. Les concepts et algorithmes présentés dans cet ouvrage sont accompagnés d'exemples illustratifs et détaillés afin de permettre au lecteur d'acquiescer une compréhension approfondie et concrète. De plus, une variété d'exercices, couvrant divers niveaux de complexité, est présentée à la fin de chaque chapitre.

Le Chapitre 1 introduit le concept de graphe et présente quelques notions de base, la représentation matricielle des graphes ainsi que les concepts liés à la connexité.