

CALCUL INFINITÉSIMAL

JEAN

DIEUDONNÉ

Hermann  *Collection*
Paris *Méthodes*

Jean Dieudonné

CALCUL INFINITÉSIMAL

M. 05

DEUXIÈME ÉDITION REVUE ET CORRIGÉE

1275



Hermann
Paris



Collection
Méthodes

Table

<i>Préface</i>	13
<i>Notations</i>	19

0. PRÉLIMINAIRES

1. Ensembles et fonctions	23
2. Nombres réels et nombres complexes	24
3. Fonctions continues d'une variable réelle	25
4. Extensions des notions de dérivée et de primitive	27
5. Topologie du plan	31

I. MAJORER, MINORER

1. Opérations élémentaires	35
2. Séries et limites	38
3. Le théorème de la moyenne	41
4. L'inégalité de Cauchy-Schwarz	44
<i>Problèmes</i>	46

II. APPROXIMATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION

1. Position du problème	53
2. Méthode de la fausse position (ou <i>regula falsi</i>)	55
3. Résolution de $x = g(x)$ par itération	56
4. La méthode de Newton	58
<i>Appendice</i> : Séparation des racines d'un polynôme	61
<i>Problèmes</i>	65

III. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

1. Introduction	71
2. Fonctions de comparaison	72

3. Relations de comparaison	73
4. Calcul sur les relations de comparaison	75
5. Relation d'ordre dans \mathbb{E}	76
6. Développements asymptotiques	78
7. Calcul des développements asymptotiques	82
8. Développements asymptotiques des fonctions implicites	85
9. Convergence des intégrales impropres	89
10. Développement asymptotique d'une primitive	93
11. Convergence des séries et développements asymptotiques des sommes partielles	99
<i>Appendice</i> : Polygone de Newton et développements de Puiseux	106
<i>Problèmes</i>	112

IV. INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

1. Introduction	121
2. La méthode de Laplace	121
3. Intégrales eulériennes	125
4. Méthode de la phase stationnaire	131
<i>Problèmes</i>	136

V. APPROXIMATION UNIFORME

1. Écart de deux fonctions	143
2. Convergence uniforme et convergence simple	144
3. Propriétés des suites uniformément convergentes	147
4. Régularisation	151
5. Le théorème d'approximation de Weierstrass	157
<i>Appendice</i> : Polynômes de Bernstein	159
<i>Problèmes</i>	160

VI. FONCTIONS ANALYTIQUES

1. La série de Taylor	165
2. Séries entières	166
3. Le principe des zéros isolés	168
4. Substitution d'une série entière dans une série entière	169
5. Fonctions analytiques	173
6. Dérivées et primitives d'une fonction analytique	176
7. Le principe du prolongement analytique	179
8. Exemples de fonctions analytiques	182
9. Le principe du maximum	188
<i>Problèmes</i>	192

VII. LA THÉORIE DE CAUCHY

1. Chemins et lacets	197
2. Intégration le long d'un chemin	200
3. Le problème des primitives des fonctions analytiques	201
4. Homotopies de chemins et homotopies de lacets. Domaines simplement connexes	203
5. Le théorème de Cauchy	205
6. Indice d'un point par rapport à un lacet	207
7. La formule de Cauchy	211
8. Inégalités de Cauchy; théorème de Liouville	215
9. Conditions de Cauchy	216
10. Le théorème de convergence de Weierstrass	220
<i>Problèmes</i>	224

VIII. POINTS SINGULIERS DES FONCTIONS ANALYTIQUES. RÉSIDUS

1. Prolongement analytique et singularités	229
2. Points singuliers isolés : la série de Laurent	232
3. Étude d'une fonction analytique au voisinage d'un point singulier isolé	235
4. Le théorème des résidus	238
5. Application du théorème des résidus à des calculs d'intégrales ..	241
6. Applications du théorème des résidus à la résolution des équations	244
7. Inversion des fonctions analytiques : I. Le problème local	249
8. Inversion des fonctions analytiques : II. Le problème global	251
9. La fonction logarithme	255
10. Application à des calculs d'intégrales	262
11. Application aux produits infinis	266
<i>Problèmes</i>	269

IX. APPLICATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES
AUX PROBLÈMES D'APPROXIMATION

1. La méthode du col	279
2. Exemples d'application de la méthode du col	285
3. Développements eulériens	289
4. La fonction gamma dans le domaine complexe	292
5. Nombres et polynômes de Bernoulli	297
6. Développements trigonométriques des polynômes de Bernoulli ..	299
7. Formule d'Euler-Maclaurin	302

8. Série de Fourier et approximation par des polynômes trigonométriques	307
9. Approximation en moyenne quadratique et séries de Fourier	312
10. Coefficients de Fourier et propriétés de régularité	315
<i>Appendice</i> : Le phénomène de Runge	319
<i>Problèmes</i>	321

X. REPRÉSENTATION CONFORME

1. Caractérisation des applications conformes	333
2. Les problèmes de la représentation conforme	335
3. La transformation homographique	337
4. Exemples de représentations conformes	339
5. La transformation de Schwarz-Christoffel	342
6. Le principe de symétrie	344
7. Représentation conforme et fonctions elliptiques	345
<i>Problèmes</i>	350

XI. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Solutions et solutions approchées	359
2. Comparaison des solutions approchées	360
3. La méthode de Cauchy-Lipschitz	363
4. Extension aux systèmes différentiels et aux équations différentielles d'ordre supérieur	367
5. Équations différentielles dans le domaine complexe	372
6. Dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales et aux paramètres	376
<i>Problèmes</i>	378

XII. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1. Domaine d'existence d'une solution d'une équation différentielle linéaire	381
2. Matrice résolvante d'un système d'équations différentielles linéaires dans le domaine réel	383
3. Équations différentielles linéaires à coefficients constants	388
4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques	390
5. Équations différentielles linéaires dans le domaine complexe	391
<i>Problèmes</i>	394

XIII. PERTURBATIONS DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

1. Stabilité d'une solution d'une équation différentielle	397
2. Stabilité des solutions des équations voisines des équations linéaires.	398
3. Stabilité conditionnelle	401
4. Points critiques des systèmes autonomes à deux variables	408
<i>Problèmes</i>	414

XIV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

1. Principaux problèmes	419
2. Généralités	420
3. La transformation de Liouville	421
4. Développements asymptotiques des solutions	423
5. Extension au domaine complexe	428
6. Équations du second ordre dépendant d'un paramètre	431
7. Théorèmes d'oscillation et de comparaison	434
8. Conditions aux limites	437
9. Équations linéaires du second ordre à coefficients périodiques ...	441
<i>Problèmes</i>	447

XV. FONCTIONS DE BESSEL

1. Intégration des équations différentielles linéaires par des intégrales dépendant d'un paramètre	453
2. Les fonctions de Hankel	454
3. Prolongements analytiques et développements asymptotiques des fonctions de Hankel	456
4. Fonctions de Bessel et fonctions de Neumann	459
5. Fonctions de Bessel d'indice entier	462
<i>Problèmes</i>	463
<i>Index</i>	467
<i>Bibliographie</i>	472
<i>Principales formules</i>	474

Les étudiants d'aujourd'hui ne savent plus calculer. Ce grief est fréquent chez les physiciens et les ingénieurs comme chez tous ceux qui appliquent les mathématiques. Un changement de variables ou une intégration par parties est simple pour celui qui a appris, sans vaine abstraction, le maniement des concepts de base. La prétendue opposition entre mathématiques modernes et mathématiques classiques n'a rien à y faire. En Algèbre et en Géométrie surtout, on a pu balayer des traditions inutiles en préparant l'abord du merveilleux outil forgé dans les trois derniers siècles, le Calcul infinitésimal, base de l'Analyse moderne.

Cet ouvrage, conforme aux programmes les plus nouveaux, apprend le maniement des inégalités comme des égalités et pourrait se résumer en :

MAJORER, MINORER, APPROCHER

L'ouvrage ne sacrifie jamais la rigueur à la commodité, ni ne réduit le Calcul infinitésimal à des recettes. Son but est de permettre à l'étudiant d'accéder à une véritable "intuition" du Calcul infinitésimal et d'acquiescer ce que l'on appelle le "sens de l'Analyse".

Les auteurs de la collection *Méthodes* ont la double vocation de chercheurs et d'enseignants; aussi leurs livres donnent-ils l'exposé le plus à jour des questions traitées, avec une présentation pédagogique expérimentée et attrayante. Cette synthèse permet au lecteur, dans chaque discipline et à chaque niveau, d'accéder aux stades les plus avancés de la connaissance en percevant l'ensemble du sujet de façon claire et en étant informé des développements en cours.

*Les méthodes sont les habitudes de l'esprit
et les économies de la mémoire.*

Rivay



Hermann, éditeurs des sciences et des arts, 293 rue Lecourbe, 75015 Paris