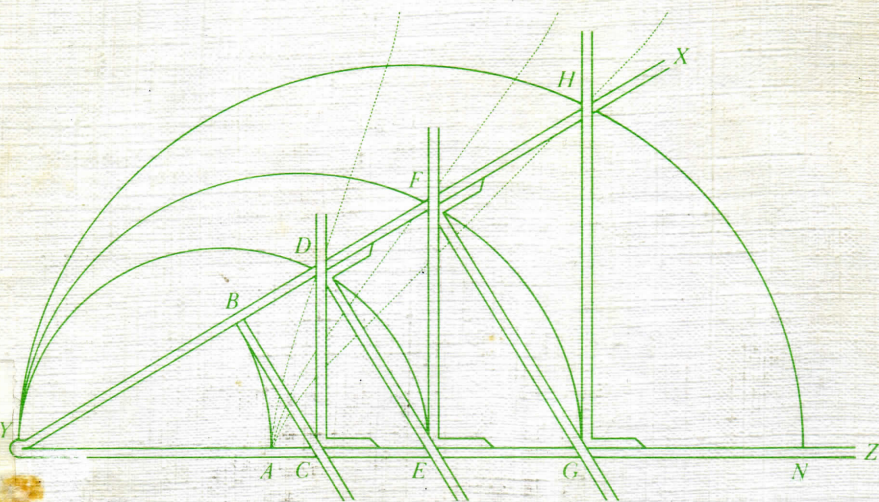


nombre, mesure et continu. épistémologie et histoire

jean dhombres
publication de l'irem de nantes



EDIC/FERNAND NATHAN

M04

nombre, mesure et continu.

4053

épistémologie et histoire

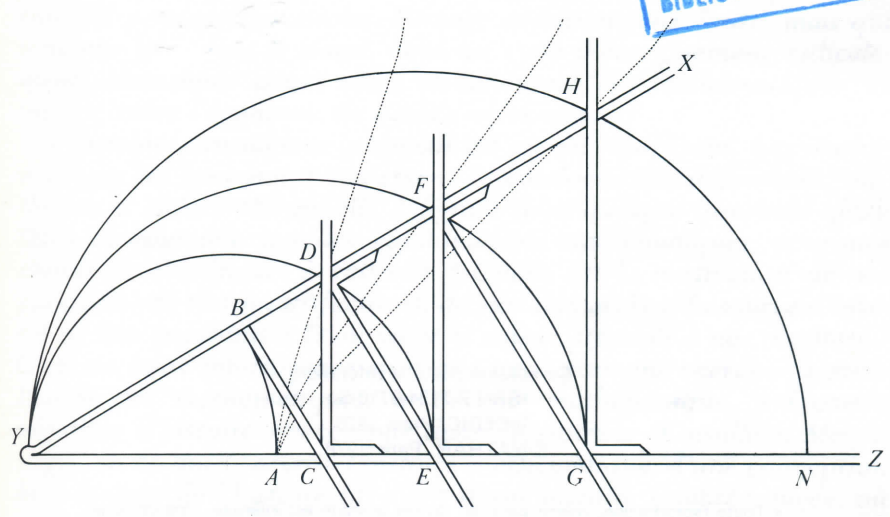
M.04
~~M.04~~
Aut.

4053 3/3

jean dhombres

publication de l'irem de nantes

CENTRE UNIVERSITAIRE
DE TIZI-OUZOU
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE



CEDIC/FERNAND NATHAN

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

I NOMBRE ET MESURE DANS LA MATHÉMATIQUE GRECQUE JUSQU'À EUCLIDE

1 Statut des Mathématiques selon Platon	19
2 Doctrine platonicienne des concepts mathématiques	22
3 Doctrine de l'analyse du Livre V des <i>Eléments</i> d'Euclide	25
3.1 <i>Les manuscrits et leur auteur</i>	28
3.2 <i>Environnement intellectuel du Livre V</i>	28
3.3 <i>Les définitions</i>	29
3.4 <i>Les principales propositions et quelques démonstrations</i>	31
3.5 <i>La quatrième proportionnelle</i>	39
3.6 <i>La duplication du cube</i>	47
4 Les résultats du Livre V vus du XX ^{ème} siècle	48
5 Euclide a-t-il construit les réels ?	50
6 Un essai de récurrence historique sur la crise des irrationnels	56
6.1 <i>La préhistoire</i>	58
6.2 <i>Les paradoxes des Eléates</i>	58
6.3 <i>Les réfutations d'Aristote et sa conception de l'infini</i>	60
6.4 <i>La solution eudoxienne</i>	62
	64

II NOMBRE ET MESURE CHEZ LES ALEXANDRINS

1 Doctrine aristotélicienne des concepts mathématiques	67
2 Le principe mathématique d'exhaustion	69
2.1 <i>La notion d'aire</i>	72
2.2 <i>Les deux premières Propositions du Livre XII</i>	72
2.3 <i>L'axiome d'Archimède et ses conséquences</i>	75
2.4 <i>Les autres Propositions du Livre XII</i>	79
3 Apport d'Archimède sur mesure et nombre	81
3.1 <i>Notion de longueur chez Archimède</i>	81
3.2 <i>Quadrature d'un segment de parabole</i>	83
3.3 <i>Utilisation des irrationnels par Archimède</i>	86
4 Le courant numéricien	91
4.1 <i>Des recettes</i>	94
4.2 <i>L'algorithme d'Euclide</i>	94
4.3 <i>Les irrationnels</i>	96
4.4 <i>Le cas du nombre π</i>	100
5 Conclusion	106
	109

Table des Matières

III ALGÈBRISATION DU DOMAINE NUMÉRIQUE	111
1 Notation et symboles numériques antiques	113
1.1 Systèmes méditerranéens	113
1.2 Système maya	115
2 Notations et algébrisation au temps de Diophante	116
3 Apports hindous et arabes	117
3.1 Apports hindous en Arithmétique et sur l'infini	118
3.2 Apports hindous sur les irrationnels	120
3.3 Apports arabes	121
4 Nombres dans le Moyen-Age occidental	122
4.1 Le Liber Abaci de Fibonacci	123
4.2 Les Ecoles d'Oxford et de Paris	125
4.3 Nicole Oresme et la notion de fonction	126
5 Ecoles Italienne, Française et Allemande de la Renaissance	127
6 Algébrisation de la géométrie par Descartes	134
6.1 Les Règles de la Méthode selon R. Descartes	134
6.2 Primauté de la géométrie	137
6.3 La Géométrie analytique	140
7 Algèbre et théorie des équations jusqu'à Gauss, Abel et Galois	143
7.1 L'état des choses au temps de Descartes	143
7.2 L'empirisme anglo-saxon	148
7.3 Développement ultérieur	148
IV ALGÈBRISATION DES GRANDEURS CONTINUES :	
LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL	151
1 La mathématique comme langage chez Galilée	154
2 Les indivisibles et l'analyse infinitésimale	155
2.1 Le principe de continuité de Nicolas de Cuse	155
2.2 Les indivisibles de Cavalieri	156
2.3 Les quantités infinitésimales	160
3 Le nombre chez Descartes et Galilée	162
4 Les embarras de Newton	163
4.1 Notion de nombre	163
4.2 Analyse infinitésimale : les fluxions	164
5 La démarche de Leibniz	167
5.1 Nombre et continuité chez Leibniz	168
5.2 Analyse des quantités infinitésimales chez Leibniz	170
5.3 L'Analyse non standard	173
5.4 Extension philosophique	176

Table des Matières

6 La mise en ordre jusqu'à Cauchy	177
6.1 La totalisation philosophique chez Hegel	177
6.2 Les résultats de l'Analyse et les essais de fondation du calcul	178
6.3 La rigueur dans la notion de convergence	181
6.4 La démarche scientifique de Cauchy	182
6.4.1 La volonté explicite de rigueur	182
6.4.2 Le concept unificateur de l'analyse : la notion de limite	183
6.4.3 Le Cours d'Analyse Algébrique	185
6.4.4 Le calcul différentiel et intégral	189
7 Théorie de la mesure : de Riemann à Lebesgue	192
V FONDATION DES GRANDEURS CONTINUES	197
1 Les doutes des mathématiciens et les certitudes des philosophes	199
1.1 Les doutes sur l'espace euclidien	199
1.2 Les certitudes de E. Kant	200
1.3 Le scientisme positiviste : un pragmatisme dogmatique en mathématiques	206
1.4 Les maladresses concernant les techniques de l'analyse : Cauchy, Bolzano, etc.	208
1.4.1 Convergence et critère de Cauchy	208
1.4.2 Limite Supérieure	211
1.4.3 La continuité et la continuité uniforme	212
1.4.4 Le théorème des valeurs intermédiaires	216
2 La construction des réels par R. Dedekind	219
2.1 \mathbb{R} comme domaine inextensible	219
2.2 La notion de continu	221
2.3 \mathbb{R} construit à partir de l'arithmétique	223
3 La construction des réels par G. Cantor	224
3.1 Les suites fondamentales	224
3.2 Le caractère complet de \mathbb{R}	225
3.3 Lien avec la notion de continu et la géométrie	227
4 La construction des réels par K. Wierstrass	227
5 L'extrême de l'arithmétisation : Leopold Kronecker	228
6 Le point de vue axiomatique : D. Hilbert	229
7 Equivalence mathématique des diverses constructions	231
7.1 Injection dans \mathbb{R} et vérification des axiomes de Hilbert	231
7.2 Unicité de \mathbb{R} au sens de Cantor	235
7.3 Unicité de \mathbb{R} au sens de Dedekind et équivalence des constructions	236
7.4 Autres constructions	237

Table des Matières

3 Le statut des Mathématiques et des mathématiciens	293
4 Livres classiques des Hans : rôle du calcul	294
5 L'Ecole Algébrique des Songs et des Hans	296
6 Primauté de l'algèbre, de la combinatoire et du numérique	299
6.1 <i>Fonction protocolaire du nombre</i>	299
6.2 <i>Utilisation des nombres décimaux</i>	302
CONCLUSION	305
BIBLIOGRAPHIE	307
CHRONOLOGIE SOMMAIRE DES MATHÉMATICIENS ET AUTEURS CITÉS	310
APPENDICE 1 : PROPRIÉTÉS DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS	323
APPENDICE 2 : LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT	327
INDEX DES NOMS CITÉS	331

Table des Matières

3 Le statut des Mathématiques et des mathématiciens	293
4 Livres classiques des Hans : rôle du calcul	294
5 L'Ecole Algébrique des Songs et des Hans	296
6 Primauté de l'algèbre, de la combinatoire et du numérique	299
6.1 <i>Fonction protocolaire du nombre</i>	299
6.2 <i>Utilisation des nombres décimaux</i>	302
CONCLUSION	305
BIBLIOGRAPHIE	307
CHRONOLOGIE SOMMAIRE DES MATHÉMATIENS ET AUTEURS CITÉS	310
APPENDICE 1 : PROPRIÉTÉS DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS	323
APPENDICE 2 : LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT	327
INDEX DES NOMS CITÉS	331

ISBN 2-7124-0710-5