

J. QUINET

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

4- Equations différentielles

$$\frac{1}{y \sqrt{1+x^2/y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Preons la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Preons la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Preons maintenant la dérivée par rapport à y de $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) = \frac{(x^2+y^2) \cdot 1 - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre. Le cas où $\alpha = 0$ est ce que nous étudions plus.

Le polynôme caractéristique est

$$P = X^2 + 2\alpha X + \Omega^2$$

Il nous faut distinguer trois cas, suivant que le discriminant

$$\Delta' = \alpha^2 - \Omega^2,$$

est strictement positif, nul ou strictement négatif.

Preons enfin la dérivée par rapport à x de $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right) = \frac{(x^2+y^2)(-1) + x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

De telles singularités apparaissent souvent en physique, lorsqu'on a un théorème mathématique ... sans vérifier qu'on a le droit de l'appliquer

Dunod

$$\frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} \text{ et } f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

$$LC \frac{d^2 r}{dt^2} + RC \frac{dr}{dt} + \dots$$

6^e édition =

Posons pour simplifier l'écriture

$$\frac{R}{2L} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{LC}$$

nous obtenons l'équation for

J. QUINET

Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

DB 61
376.00

مكتبة حسي وادي
عيسى - الشاهدي

No inv.

A 58/2

**COURS
ÉLÉMENTAIRE
DE
MATHÉMATIQUES
SUPÉRIEURES**

Tome 4

Equations différentielles

Faculté des Sciences
BIBLIOTHEQUE
N° d'Inventaire: A 58/2

58/2

N° d'Entrée :

N° Inventaire :

6^e édition
par une équipe de professeurs

Avec la participation de

J. FAZEKAS

Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris

N° de Côte:

N° DE COTE : 58/2

Dunod

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. Fonctions de plusieurs variables

1.1	Définition	1
1.2	Parties remarquables	3
1.3	Limite d'une fonction en un point	4
1.4	Fonction continue en un point	4
1.5	Continuité sur une partie	6
1.6	Dérivées partielles	7
1.7	Dérivée d'une fonction composée	8
1.8	Dérivées partielles successives	11
1.9	Théorème de Schwarz	13
1.10	Fonctions homogènes	15
1.11	Dérivées partielles d'une fonction homogène	16
1.12	Égalité d'Euler	16
1.13	Fonctions implicites	18
1.14	Calculs de dérivées de fonctions implicites	19
1.15	Dérivée seconde d'une fonction implicite	21
1.16	Fonctions définies par des intégrales	23
1.17	Application à des calculs d'intégrales	24
1.18	La fonction gamma	25
	<i>Exercices</i>	27

CHAPITRE 2. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

2.1	Fonctions différentiables	30
2.2	Différentielle d'une fonction	31
2.3	Applications des différentielles aux calculs approchés	33
2.4	Applications radioélectriques	35
2.5	Formes différentielles	37
	<i>Exercices</i>	40

CHAPITRE 3. Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables

3.1	Maximums et minimums	42
3.2	Formule des accroissements finis	43
3.3	Formule de Taylor-Lagrange	44
3.4	Application à la recherche des maximums et des minimums	46
3.5	Exemples de recherche de maximums et de minimums	47
	<i>Exercices</i>	52

CHAPITRE 4. Équations différentielles du premier ordre

4.1	Généralités	53
4.2	Classification des équations différentielles du premier ordre	53
4.3	Premier type : Équations à variables séparables	53

4.4	Deuxième type : Équations homogènes	55
4.5	Troisième type : Équations linéaires	57
4.6	Premier cas : Équation linéaire sans second membre	57
4.7	Deuxième cas : Équation linéaire avec second membre	58
4.8	Cas particulier important : Équation linéaire à coefficients constants et avec second membre constant	61
	<i>Exercices</i>	62

CHAPITRE 5. Applications des équations différentielles du premier ordre

5.1	Loi de l'intérêt composé	64
5.2	Croissance d'une population	66
5.3	Profil d'égale résistance	68
5.4	Surface d'équilibre d'un liquide en rotation	70
5.5	Détermination d'une trajectoire	71
5.6	Chute d'un corps dans l'air	72
5.7	Portée d'un projectile dans l'air	74
5.8	Miroir parabolique	75
5.9	Détente isotherme d'un gaz parfait	77
5.10	Équation des courbes adiabatiques des gaz parfaits	78
5.11	Variation de la pression atmosphérique avec l'altitude	80
5.12	Décharge d'un condensateur dans une résistance	82
5.13	Charge d'un condensateur à travers une résistance	85
5.14	Disparition du courant électrique dans une bobine d'inductance	88
5.15	Établissement du courant dans une bobine d'inductance	89
5.16	Transformation de l'énergie électrique en chaleur	90
5.17	Formule fondamentale du courant alternatif	92

CHAPITRE 6. Applications des équations différentielles linéaires du premier ordre aux circuits électriques

6.1	Problème I	97
6.2	Problème II	100
6.3	Problème III	102
6.4	Problème IV	105
6.5	Problème V	109
6.6	Problème VI	110
6.7	Problème VII	115
6.8	Problème VIII	120

CHAPITRE 7. Équations différentielles du deuxième ordre

7.1	Classification des équations différentielles du deuxième ordre	124
7.2	Équations où la fonction n'apparaît que par ses dérivées	124
7.3	Équations où la fonction n'intervient que par sa dérivée seconde	126
7.4	Équations où la variable n'apparaît pas explicitement	127
7.5	Exemples	128

7.6	Équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre	129
7.7	Le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctes	130
7.8	Le polynôme caractéristique a une racine double	131
7.9	Le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées	132
7.10	Équations linéaires avec second membre	134
7.11	Exemples	135
7.12	Équations différentielles linéaires à coefficients non constants sans second membre	141
7.13	Équations différentielles linéaires avec second membre quelconque	143
Exercices		145

CHAPITRE 8. Applications des équations différentielles du deuxième ordre

8.1	Loi de la chute des corps (accélération constante)	146
8.2	Trajectoire d'un projectile	146
8.3	Loi de la chute des corps (attraction newtonnienne)	147
8.4	Calcul de la période d'un pendule simple	149
8.5	Oscillations d'un solide autour d'un axe	150
8.6	Mouvement rectiligne d'un point attiré ou repoussé par un point fixe proportionnellement à la distance	153
8.7	Mouvement plan d'un point attiré ou repoussé par un point fixe proportionnellement à la distance	156
8.8	Oscillations d'une colonne liquide	157
8.9	Calcul de la période d'un circuit oscillant	158
8.10	Propagation de la chaleur le long d'une barre	159
8.11	Étude détaillée de la décharge d'un condensateur dans une bobine d'inductance	161
8.12	Analogie mécanique	170
8.13	Mouvement du cadre mobile d'un appareil de mesures électriques	171
8.14	La résonance	172
8.15	Cas de l'amortissement	173

CHAPITRE 9. Applications des équations différentielles linéaires du deuxième ordre aux circuits électriques

9.1	Problème I	175
9.2	Problème II	179
9.3	Problème III	183
9.4	Problème IV	184
9.5	Problème V	187
9.6	Problème VI	189

CHAPITRE 10. Transformation de Laplace

10.1	Transformation de Laplace	192
10.2	Cas des fonctions périodiques	193
10.3	Dérivation	194
10.4	Intégration	195

10.5	Originale d'une dérivée	196
10.6	Translation	196
10.7	Originale d'une translatée	197
10.8	Homothétie	197
10.9	Produit de convolution	198
10.10	Intégration des équations différentielles linéaires	200
10.11	Impédance opérationnelle	202
	<i>Exercices</i>	205
CHAPITRE 11. Calcul numérique		
11.1	Vocabulaire du calcul numérique	208
11.2	Règles de calcul des erreurs	208
11.3	Exemples pratiques de calculs d'erreur	209
11.4	Interpolation linéaire	213
11.5	Méthode des parties proportionnelles	217
11.6	Méthode de Newton	219
11.7	Méthode d'itération	221
11.8	Méthode des rectangles	225
11.9	Méthode des trapèzes	227
11.10	Calcul approché de la somme d'une série	231
11.11	Séries majorées par une série géométrique	232
11.12	Séries majorées par une intégrale	233
11.13	Séries alternées	234
Solutions des exercices		
	Chapitre 1	237
	Chapitre 2	246
	Chapitre 3	251
	Chapitre 4	256
	Chapitre 7	266
	Chapitre 10	276
	Transformées de Laplace usuelles	280
	Index	281



J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux*, est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

- EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
- AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
- Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides*, en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
- Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et B. Sahler "Probabilités et statistique".



ISBN 2-04-007423-6