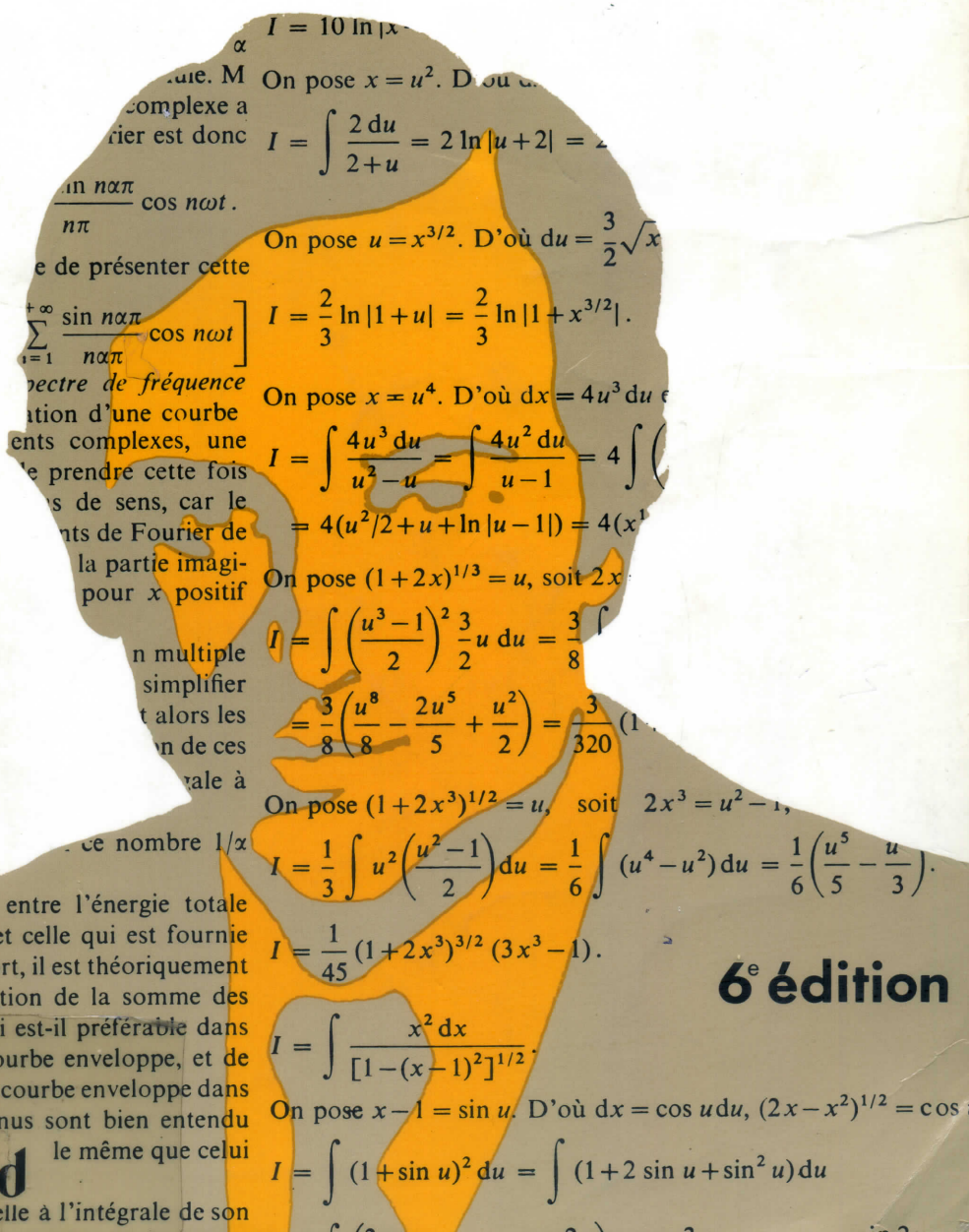


J. QUINET

# Cours élémentaire de mathématiques supérieures

## 3- Calcul intégral et séries



$$I = 10 \ln|x|$$

On pose  $x = u^2$ . D'où  $dx = 2u du$ .

$$I = \int \frac{2 du}{2+u} = 2 \ln|u+2| = 2 \ln|x+2|$$

On pose  $u = x^{3/2}$ . D'où  $du = \frac{3}{2} \sqrt{x} dx$ .

$$I = \frac{2}{3} \ln|1+u| = \frac{2}{3} \ln|1+x^{3/2}|$$

On pose  $x = u^4$ . D'où  $dx = 4u^3 du$ .

$$I = \int \frac{4u^3 du}{u^2-u} = \int \frac{4u^2 du}{u-1} = 4 \int \left( \frac{u^2}{u-1} \right) du$$
$$= 4(u^2/2 + u + \ln|u-1|) = 4(x^{3/2} + x + \ln|x^{3/2}-1|)$$

On pose  $(1+2x)^{1/3} = u$ , soit  $2x = u^3 - 1$ .

$$I = \int \left( \frac{u^3-1}{2} \right)^2 \frac{3}{2} u du = \frac{3}{8} \int (u^6 - 2u^3 + 1) u du$$
$$= \frac{3}{8} \left( \frac{u^8}{8} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{3}{320} (10u^8 - 8u^5 + 4u^2)$$

On pose  $(1+2x^3)^{1/2} = u$ , soit  $2x^3 = u^2 - 1$ .

$$I = \frac{1}{3} \int u^2 \left( \frac{u^2-1}{2} \right) du = \frac{1}{6} \int (u^4 - u^2) du = \frac{1}{6} \left( \frac{u^5}{5} - \frac{u}{3} \right)$$

$$I = \frac{1}{45} (1+2x^3)^{3/2} (3x^3 - 1)$$

$$I = \int \frac{x^2 dx}{[1-(x-1)^2]^{1/2}}$$

On pose  $x-1 = \sin u$ . D'où  $dx = \cos u du$ ,  $(2x-x^2)^{1/2} = \cos u$ .

$$I = \int (1 + \sin u)^2 du = \int (1 + 2 \sin u + \sin^2 u) du$$

6<sup>e</sup> édition

Dunod

proportionnelle à l'intégrale de son spectre et celle qui est fournie par la détermination de la somme des difficultés. Aussi est-il préférable dans le cas continu à sa courbe enveloppe, et de même que celui

1702/T3

**J. QUINET**

*Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité*

**COURS  
ÉLÉMENTAIRE  
DE  
MATHÉMATIQUES  
SUPÉRIEURES**

**Tome 3  
Calcul intégral et séries**

*6<sup>e</sup> édition corrigée  
par une équipe de professeurs  
Avec la participation de*

**J. FAZEKAS**

*Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris*

1427



**Dunod**

## TABLE DES MATIÈRES

### CHAPITRE 1. Procédés pratiques de calcul des primitives

1.1	Préliminaires . . . . .	1
1.2	Changement de variable . . . . .	1
1.3	Utilisation de l'intégration par parties . . . . .	3
1.4	Exemples . . . . .	4
1.5	Utilisation simultanée des deux procédés fondamentaux . . . . .	9
1.6	Primitives des éléments simples de première espèce . . . . .	10
1.7	Primitives des éléments simples de seconde espèce . . . . .	11
1.8	Méthodes particulières . . . . .	13
1.9	Exemples . . . . .	13
1.10	Composées de fonctions rationnelles et de fonctions exponentielles . . . . .	17
	<i>Exercices</i> . . . . .	19

### CHAPITRE 2. Intégrales trigonométriques

2.1	Méthode générale . . . . .	21
2.2	Exemples . . . . .	22
2.3	Méthodes particulières . . . . .	24
2.4	Primitives de la forme $I_{p,q} = \int \cos^p x \sin^q x \, dx$ , où $p$ et $q$ sont des entiers rationnels . . . . .	25
2.5	Primitives de la forme $I_m = \int \sin^m x \, dx$ et $J_m = \int \cos^m x \, dx$ , où $m$ est un entier naturel . . . . .	26
2.6	Primitives de la forme $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ et $J_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ , où $n$ est un entier naturel non nul . . . . .	29
2.7	Exemples . . . . .	30
2.8	Primitives de la forme $I_n = \int \operatorname{tg}^n x \, dx$ , où $n$ est un entier rationnel . . . . .	32
2.9	Intégrales de Wallis . . . . .	33
	<i>Exercices</i> . . . . .	35

### CHAPITRE 3. Intégrales abéliennes

3.1	Primitives de la forme $I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ . . . . .	36
3.2	Exemples . . . . .	37
3.3	Primitives de la forme $I = \int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ . . . . .	37
3.4	Primitives de la forme $I = \int \sqrt{ax^2+bx+c} \, dx$ . . . . .	39
3.5	Exemples . . . . .	40

3.6	Primitives de la forme $I = \int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ , où $R$ est une fraction rationnelle à deux indéterminées. . . . .	40
3.7	Exemples . . . . .	41
3.8	Primitives de la forme $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ , où $R$ est une fraction rationnelle à deux indéterminées. . . . .	42
3.9	Exemples . . . . .	42
	<i>Exercices</i> . . . . .	44

#### CHAPITRE 4. Développements limités

4.1	Relation de domination . . . . .	46
4.2	Relation de similitude . . . . .	47
4.3	Relation de prépondérance . . . . .	47
4.4	Relation d'équivalence . . . . .	48
4.5	Comparaison des fonctions au voisinage de l'infini . . . . .	51
4.6	Définition des développements limités . . . . .	53
4.7	Exemples . . . . .	54
4.8	Intégration des développements limités . . . . .	55
4.9	Formule de Taylor-Young . . . . .	56
4.10	Exemples . . . . .	57
4.11	Développements limités des fonctions usuelles . . . . .	59
4.12	Développement limité d'une fonction composée . . . . .	59
4.13	Parties principales . . . . .	61
4.14	Exemples de recherches de parties principales . . . . .	62
	<i>Exercices</i> . . . . .	63

#### CHAPITRE 5. Étude des formes indéterminées

5.1	Généralités . . . . .	65
5.2	Exemples d'utilisation des parties principales . . . . .	66
5.3	Utilisation des dérivées . . . . .	70
5.4	Exemples d'utilisation des développements limités . . . . .	72
	<i>Exercices</i> . . . . .	75

#### CHAPITRE 6. Intégrales impropres

6.1	Intégrales sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ . . . . .	77
6.2	Cas des fonctions à valeurs réelles positives . . . . .	79
6.3	Convergence absolue et semi-convergence. . . . .	82
6.4	Procédés de calcul des intégrales impropres . . . . .	82
6.5	Intégrales sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$ . . . . .	84
	<i>Exercices</i> . . . . .	84

## CHAPITRE 7. Séries numériques

7.1 Définitions . . . . .	94
7.2 Série géométrique . . . . .	95
7.3 Séries définies à partir d'un certain rang . . . . .	95
7.4 Opérations linéaires sur les séries . . . . .	95
7.5 Modification d'un ensemble fini de termes d'une série . . . . .	96
7.6 Condition nécessaire de convergence . . . . .	97
7.7 Critère de Cauchy . . . . .	97
7.8 Calcul de la somme d'une série . . . . .	97
7.9 Comparaison des séries de nombres réels positifs . . . . .	98
7.10 Comparaison directe des séries de nombres réels positifs . . . . .	100
7.11 Comparaison d'une série et d'une intégrale . . . . .	100
7.12 Règle de Cauchy . . . . .	102
7.13 Règle de Riemann . . . . .	103
7.14 Comparaison logarithmique des séries . . . . .	104
7.15 Règle de D'Alembert . . . . .	105
7.16 Convergence absolue. . . . .	106
7.17 Séries alternées . . . . .	107
7.18 Remarque finale. . . . .	109
<i>Exercices</i> . . . . .	110

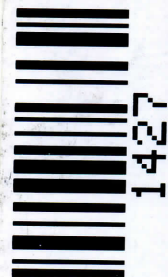
## CHAPITRE 8. Séries entières

8.1 Séries de fonctions. . . . .	112
8.2 Convergence simple et convergence uniforme . . . . .	112
8.3 Propriétés des séries uniformément convergentes . . . . .	113
8.4 Intervalle de convergence. . . . .	114
8.5 Exemples . . . . .	115
8.6 Dérivation et intégration des séries entières . . . . .	116
8.7 Opérations algébriques sur les séries entières . . . . .	117
8.8 Fonctions développables en série entière . . . . .	118
8.9 Série de Maclaurin . . . . .	120
8.10 Fonctions d'une variable complexe . . . . .	122
8.11 Série du binôme . . . . .	123
8.12 Somme d'une série entière . . . . .	125
8.13 Application aux séries numériques . . . . .	127
<i>Exercices</i> . . . . .	128

## CHAPITRE 9. Séries de Fourier

9.1 Séries trigonométriques . . . . .	130
9.2 Fonctions orthogonales . . . . .	131
9.3 Séries de Fourier . . . . .	132
9.4 Théorème de Lejeune-Dirichlet . . . . .	134
9.5 Cas d'une période quelconque . . . . .	135
9.6 Calcul pratique des coefficients de Fourier . . . . .	136
9.7 Fonction en dents de scie triangulaires . . . . .	140
9.8 Fonctions en dents de scie . . . . .	142
9.9 Signal rectangulaire . . . . .	143





**J. Quinet**

## **Cours élémentaire de mathématiques supérieures**

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux*, est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

- EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
- AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
- Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides*, en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
- Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

**Une innovation** : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

*Essentiellement pédagogique et moderne*, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et J. F. Laslier "Probabilités et statistique".



9 782040 060213



ISBN 2-04-006021-9