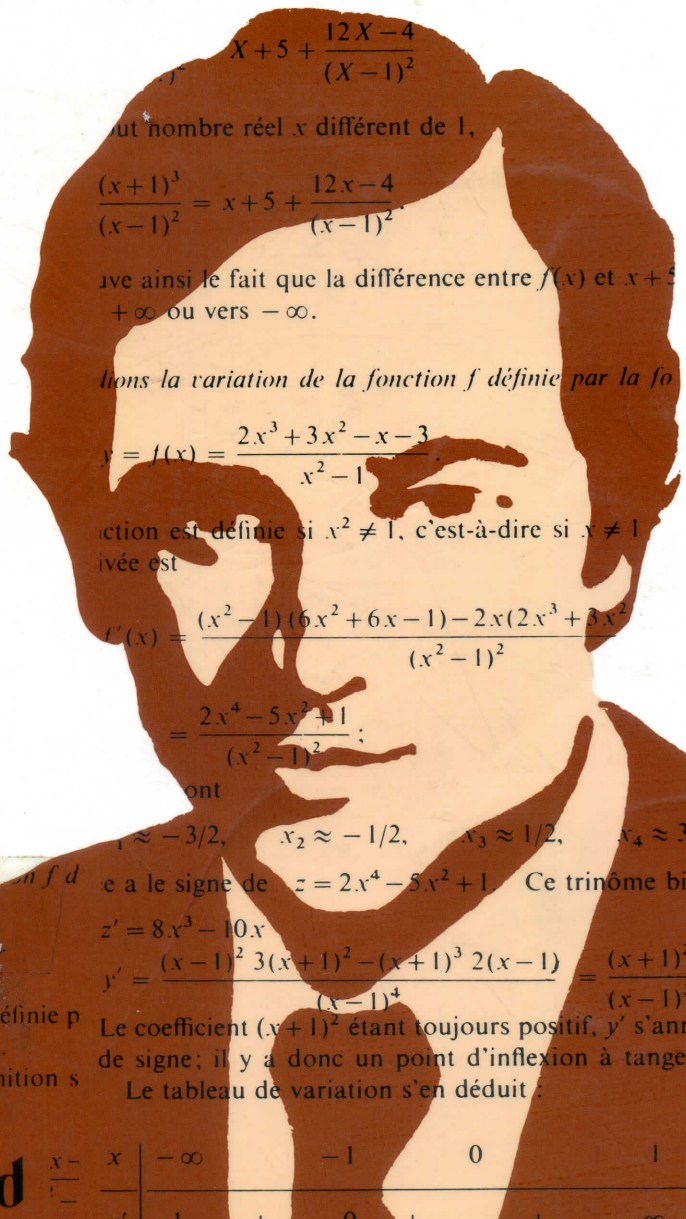


Cours élémentaire de mathématiques supérieures

2-Fonctions usuelles



$$f(x) = x + 5 + \frac{12x - 4}{(x-1)^2}$$

Pour tout nombre réel x différent de 1,

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12x - 4}{(x-1)^2}$$

avec ainsi le fait que la différence entre $f(x)$ et $x + 5$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Étudions la variation de la fonction f définie par la formule

$$y = f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$$

La fonction est définie si $x^2 \neq 1$, c'est-à-dire si $x \neq \pm 1$. Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(6x^2 + 6x - 1) - 2x(2x^3 + 3x^2 - x - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 5x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

Les racines de $f'(x) = 0$ sont $x_1 \approx -3/2$, $x_2 \approx -1/2$, $x_3 \approx 1/2$, $x_4 \approx 3/2$.

Le trinôme $z = 2x^4 - 5x^2 + 1$ a le signe de $z = 2x^4 - 5x^2 + 1$. Ce trinôme bicarré, dont la dérivée

$$z' = 8x^3 - 10x$$

$$y' = \frac{(x-1)^2 3(x+1)^2 - (x+1)^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

Le coefficient $(x+1)^2$ étant toujours positif, y' s'annule pour $x = -1$ sans changer de signe; il y a donc un point d'inflexion à tangente horizontale.

Le tableau de variation s'en déduit :

x	$-\infty$	-1	0	1	5
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$
	1	$+$	0	$+$	$+$
	1	$+$	0	$+$	$+$

3^e 6^e édition

M 02

J. QUINET

Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

**COURS
ÉLÉMENTAIRE
DE
MATHÉMATIQUES
SUPÉRIEURES**

Tome 2

Fonctions usuelles

M 02 4 (1^e)

1421

*6^e édition corrigée
par une équipe de professeurs*

Avec la participation de

J. FAZEKAS

Professeur à l'École Centrale d'Électronique de Paris



Dunod

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. Fonctions numériques

1.1	Définition	1
1.2	Limite d'une fonction en un point	1
1.3	Fonction continue en un point	3
1.4	Continuité sur un intervalle	4
1.5	Croissance d'une fonction	6
1.6	Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone	9
1.7	Fonction puissance m -ième, m entier naturel non nul	10
1.8	Fonction racine m -ième, m entier naturel non nul	11
1.9	Fonctions circulaires réciproques	12
1.10	Fonctions à valeurs complexes	16
	<i>Exercices</i>	17

CHAPITRE 2. Les dérivées

2.1	Introduction	19
2.2	Préliminaire au calcul des dérivées	19
2.3	Définition de la dérivée d'une fonction	20
2.4	Importance de la notion de dérivée	20
2.5	Procédé général de calcul des dérivées	21
2.6	Fonction dérivée d'une fonction	21
2.7	Dérivées des fonctions circulaires	22
2.8	Propriétés des fonctions dérivables	25
2.9	Exemples de calculs de dérivées	30
2.10	Interprétation géométrique de la dérivée	32
2.11	Équation de la tangente en un point	34
2.12	Extension de la notion de dérivée	36
2.13	Dérivation des fonctions à valeurs complexes	36
2.14	Dérivées successives	37
2.15	Propriétés des fonctions n fois dérivables	39
	<i>Exercices</i>	41

CHAPITRE 3. Les différentielles

3.1	Fonctions différentiables	44
3.2	Différentielle d'une fonction	45
3.3	Différentielle d'une somme, d'un produit, d'un quotient	46
3.4	Différentielle d'une fonction composée	46
3.5	Notation différentielle de la dérivée	47
3.6	Exemples de calculs de différentielles	48
3.7	La notation différentielle en physique	49
3.8	Applications des différentielles au calcul numérique	50
3.9	Applications des différentielles à l'étude de la sensibilité	52
	<i>Exercices</i>	54

CHAPITRE 4. Applications des dérivées à l'étude de la variation des fonctions

4.1	Maximums et minimums	57
4.2	Théorème de Rolle	58
4.3	Formule des accroissements finis	59
4.4	Application au sens de variation des fonctions	61
4.5	Exemples	63
4.6	Formule de Taylor-Lagrange	65
4.7	Applications de la formule de Taylor-Lagrange au calcul numérique	67
4.8	Application de la formule de Taylor-Lagrange à l'étude des points d'inflexion	69
	<i>Exercices</i>	73

CHAPITRE 5. Recherche des maximums et des minimums pour des applications pratiques

5.1	Problème de la boîte	75
5.2	Problème de la casserole	76
5.3	Problème de la boîte de conserve	77
5.4	Problème de la réflexion de la lumière (Descartes)	78
5.5	Problème de la réfraction de la lumière (Descartes)	79
5.6	Problème du navire	81
5.7	Problème de la statue	81
5.8	Problème de l'autobus	83
5.9	Problème du transformateur électrique	84
5.10	Problème du projectile	85
5.11	Problème de la résonance électrique	87
5.12	Problème de l'induction magnétique	88
5.13	Problème de la puissance électrique maximale	89
5.14	Problème du meilleur groupement de générateurs électriques	90
5.15	Problème du pont de Wheatstone	91
5.16	Problème du rendement d'un transformateur électrique	93
5.17	Problème du condensateur shunté par une résistance	94
5.18	Problème de la ligne téléphonique	96

CHAPITRE 6. Étude pratique de la variation des fonctions

6.1	Marche à suivre	98
6.2	Trinôme du second degré	100
6.3	Fonction bicarrée	101
6.4	Fonction homographique	103
6.5	Quinze exemples	104
	<i>Exercices</i>	125

CHAPITRE 7. Les intégrales

7.1	Primitives	12
7.2	Notion d'intégrale	12

7.3	Définition des fonctions intégrables	129
7.4	Valeur moyenne d'une fonction	131
7.5	Existence de fonctions intégrables	131
7.6	Changement d'intervalle d'intégration	132
7.7	Propriétés des fonctions intégrables	133
7.8	Intégrales et primitives	135
7.9	Exemples de calculs d'intégrales	138
7.10	Intégrales fonctions des deux bornes	138
7.11	Notation intégrale des primitives	139
7.12	Changement de variable	140
7.13	Utilisation de symétries et de périodicité	142
7.14	Intégration par parties	144
7.15	Primitives des fonctions à valeurs complexes	145
7.16	Intégrale des fonctions à valeurs complexes	145
7.17	Valeur moyenne d'un courant	146
7.18	Valeur efficace d'un courant	147
7.19	Puissance fournie par un courant alternatif	148
7.20	Calcul du travail à fournir pour allonger un ressort	148
7.21	Calcul de l'énergie fournie par un condensateur électrique qui se décharge	149
7.22	Calcul du travail à fournir pour écarter les plaques d'un condensateur	149
7.23	Calcul du temps nécessaire pour qu'un réservoir d'eau se vide	151
7.24	Calcul de la poussée hydraulique sur une surface verticale	152
7.25	Calcul de la diminution de la longueur d'une tige verticale	152
	<i>Exercices</i>	154

CHAPITRE 8. Fonctions logarithmes et exponentielles

8.1	Préliminaires	155
8.2	Définition des fonctions logarithmes	155
8.3	Propriétés des fonctions logarithmes	156
8.4	Logarithme népérien	157
8.5	Logarithme de base a	159
8.6	Dérivée logarithmique	161
8.7	Différentielle logarithmique	162
8.8	Fonction exponentielle	163
8.9	Fonction exponentielle de base a	165
8.10	Exercices sur les exponentielles	167
8.11	Exercices de dérivation des fonctions logarithmes et exponentielles	168
8.12	Fonctions puissances	170
8.13	Formes indéterminées exponentielles	171
8.14	Exemples	173
8.15	Quelques remarques supplémentaires sur le nombre e	174
8.16	Exemples de fonctions faisant intervenir les fonctions puissances	176
8.17	Définition des fonctions hyperboliques	180
8.18	Dérivées des fonctions hyperboliques	181
8.19	Variation des fonctions hyperboliques	181
8.20	Trigonométrie hyperbolique	184
8.21	Fonctions hyperboliques réciproques	185
8.22	Interprétation géométrique des fonctions hyperboliques	187
	<i>Exercices</i>	188
	Dérivées usuelles	190

Solutions des exercices	
Chapitre 1	191
Chapitre 2	199
Chapitre 3	211
Chapitre 4	220
Chapitre 6	225
Chapitre 7	236
Chapitre 8	240
Index terminologique	250

J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux*, est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

- EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
- AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
- Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides*, en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
- Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et J.-F. Laslier "Probabilités et statistiques".



9 782040 056339



ISBN 2-04-005633-5