



Géométries
affine, projective
et euclidienne

CLAUDE TISSERON

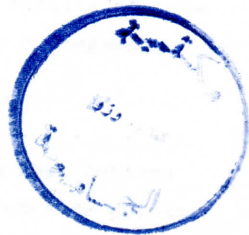
Claude Tisseron

Géométries affine,
projective
et euclidienne

M. 01 (18)

1320

$\frac{A}{A}$



HERMANN

Table

NOYAU 1 ESPACES AFFINES

X 1	NOTION D'ESPACE AFFINE.	3
	1. Définition - 2. Notation - 3. Règles de calcul - 4. Translations 5. Exemples - 6. Exercices - 7. Choix d'une origine, vectorialisé - 8. Exemple et remarque.	
X 2	BARYCENTRES, COORDONNEES.	9
	1. Définitions - 2. Remarques - 3. Remarque pratique pour la détermi- nation des barycentres - 4. Coordonnées, repères - 5. Famille affine- ment libre - 6. Exemples, droite affine, plan affine - 7. Segments, convexes - 8. Exercices.	
X 3	APPLICATIONS AFFINES.	15
	1. Définitions - 2. Exemples - 3. Caractérisations des applications affines - 4. Commentaires - 5. Points fixes - 6. Existence de points fixes - 7. Exemples, homothéties - 8. Notation matricielle - 9. Exer- cices.	
X 4	ISOMORPHISMES, EXEMPLES	24
	1. Proposition - 2. Isomorphismes - 3. Exemples - 4. Le groupe affi- ne - 5. Le groupe affine comme produit semi-direct - 6. Exercices - 7. Notion invariante par isomorphisme.	
X 5	SOUS-ESPACES AFFINES	39
	1. Définition - 2. Caractérisations des sous-espaces affines - 3. Re- marque - 4. Sous-espace affine engendré par une partie - 5. Parrallé- lisme - 6. Propriétés d'intersections - 7. Sous-espaces et applica- tions affines - 8. Exercices.	

6 PROJECTIONS, SYMETRIES, APPLICATIONS.	54
1. Projecteurs linéaires - 2. Projecteurs affines - 3. Symétries -	
4. Le théorème de Thalès - 5. Le groupe des homothéties-translations	
- 6. Les théorèmes de Ménélaüs et Ceva - 7. Le théorème de Desargues	
- 8. Le théorème de Pappus - 9. Remarques.	
7 DILATATIONS, TRANSVECTIONS.	71
1. Dilatations et transvections vectorielles - 2. Rapport avec les	
matrices - 3. Générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$ - 4. Dilatations et trans-	
vections affines - 5. Générateurs de $SA(X)$ et $GA(X)$ - 6. Exercices.	
 <u>THEME 1 CALCUL BARYCENTRIQUE - INTRODUCTION AU PLAN PROJECTIF</u>	
1 DROITES EN COORDONNEES BARYCENTRIQUES	82
1. Retour sur les coordonnées barycentriques - 2. Equation d'une	
droite - 3. Intersection de droites.	
2 APPLICATIONS.	86
1. Les théorèmes de Ménélaüs et Ceva - 2. Un lemme - 3. Le théorème	
de Desargues - 4. Le théorème de Pappus - 5. Le théorème de Pascal.	
3 POINTS A L'INFINI, PLAN PROJECTIF	94
1. Points à l'infini - 2. Le plan \hat{X} comme quotient de K^3_0 .	
 <u>THEME 2 ESPACE AFFINE X COMME HYPERPLAN AFFINE D'UN ESPACE VECTORIEL</u>	
<u>\hat{X}. APPLICATIONS, QUADRIQUES AFFINES ET PROJECTIVES.</u>	
1 CONSTRUCTION DE \hat{X}	98
1. Présentation du problème - 2. Construction de E - 3. L'espace vec-	
toriel \hat{X} .	
2 RAPPORTS ENTRE X ET \hat{X}	101
1. Repères de X et bases de \hat{X} - 2. Applications affines sur X et li-	
néaires sur \hat{X} - 3. Formes 2-affines sur X et formes quadratiques sur \hat{X} .	
3 APPLICATION : QUADRIQUES AFFINES SUR X	106
1. Généralités, exemples - 2. Simplification de l'équation - 3. For-	
mes équivalentes ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) - 4. Exemples, $n=2$ ou 3 , ($K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) -	
5. Complement. Propriétés affines des coniques (étude élémentaire) -	
6. Equations donnant la même image.	
4 APPLICATION : QUADRIQUES PROJECTIVES.	128
1. Définitions - 2. Quadriques projectives et quadriques affines -	

3. Polaires, hyperplan tangent - 4. Classification pour $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} -
 5. Exemples pour $\dim X = 2$ - 6. Exemples pour $\dim X = 3$ et $K = \mathbb{R}$ - 7.
 Quadriques projectives ayant la même image - 8. Exercices.

NOYAU 2 LE LANGAGE PROJECTIF.

1 LA DROITE PROJECTIVE.	142
1. Homographies - 2. Le groupe projectif - 3. Droite projective complétée d'une droite affine.	
2 BIRAPPORT ET HOMOGRAPHIES	144
1. Birapport de quatre points d'une droite projective - 2. Paramétrage d'une droite projective - 3. Action du groupe projectif sur les points - 4. Envoi d'un point à l'infini - 5. Interprétation vectorielle - 6. Interprétation géométrique - 7. Exercices.	
3 ESPACES PROJECTIFS.	152
1. Le dictionnaire vectoriel projectif - 2. Commentaires - 3. Repère projectif - 4. Notation et exemple - 5. Homographies - 6. Le groupe projectif de $P(E)$ - 7. Action des homographies sur les repères projectifs - 8. Envoi de points à l'infini.	
4 EXEMPLES, APPLICATIONS.	159
1. Le théorème de Pappus pour le plan projectif - 2. Perspectives d'un plan projectif - 3. Birapport de quatre droites d'un plan projectif - 4. Homologies d'un plan projectif et théorème de Desargues - 5. Homologies pour $\dim P(E) \geq 2$ - 6. Homologies d'une droite projective - 7. Courbes algébriques planes.	
5 DUALITE	166
1. Dualité dans le plan projectif - 2. Preuve du principe de dualité - 3. Remarque : birapport de quatre hyperplans d'un faisceau - 4. Interprétation avec E^* - 5. Exercices.	
6 RETOUR SUR LA NOTION D'INVARIANT.	171
1. Invariant affine - 2. Invariant unimodulaire - 3. Invariant projectif - 4. L'idée de Klein - 5. Action de groupe.	

THEME 3 LE THEOREME FONDAMENTAL DE LA GEOMETRIE AFFINE : BIJECTIONS TRANSFORMANT TROIS POINTS ALIGNES EN TROIS POINTS ALIGNES. APPLICATIONS, EXEMPLES.

1 AUTOMORPHISMES DE CORPS ET APPLICATIONS SEMI-AFFINES.	178
---	-----

1. Application σ -linéaire - 2. Propriétés immédiates - 3. Applications σ -affines - 4. Propriétés.	
2 CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES DES OPERATIONS DE K .	180
3 LE THEOREME FONDAMENTAL (cas affine).	181
1. Le théorème - 2. Remarque.	
4 LE THEOREME FONDAMENTAL (cas projectif)	185
1. σ -homographie - 2. Le théorème.	
5 APPLICATION A LA DUALITE.	187
1. Notations - 2. Dualité et homographie - 3. Dualité et formes sesquilineaires - 4. Théorème - 5. Théorème : polarités et formes sesquilineaires - 6. Problèmes.	
6 INTERMEDE CONIQUE : EXEMPLE DE POLARITE	194
1. Définition d'un ovale C - 2. Intersection de C avec une droite - 3. Ecritures avec des coordonnées homogènes - 4. Construction des polaires par rapport à C - 5. Homographies sur C et théorème de Pascal et de Brianchon.	

THEME 4 TOPOLOGIE

1 ESPACES NORMES SUR \mathbb{R} ET \mathbb{C}	204
1. Topologie sur \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n - 2. Normes - 3. Espaces normés de dimension finie - 4. Normes sur $\mathcal{L}(E,F)$ et $M_{m,n}(K)$.	
2 TOPOLOGIE SUR UN ESPACE AFFINE X .	212
1. Distance sur X - 2. Cas où $K = \mathbb{R}$, demi-espaces.	
3 TOPOLOGIE SUR LE GROUPE AFFINE.	214
1. Topologie sur $\text{AFF}(X,X')$ - 2. Utilisation de coordonnées - 3. Le groupe affine.	
4 TOPOLOGIE DES ESPACES PROJECTIFS.	219
1. Topologie quotient - 2. Exemple 1: $\mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ et S_1 - 3. Les distances intrinsèques de S_1 et S_2 - 4. Exemple 2 : Espaces projectifs.	
5 COMPLEMENTS SUR LA TOPOLOGIE DE $P_1(\mathbb{R})$ ET $P_1(\mathbb{C})$.	228
1. La droite projective $P_1(\mathbb{R})$ - 2. Topologie de $P_1(\mathbb{C})$ - 3. Exercices.	

NOYAU 3 ESPACES EUCLIDIENS

1 ESPACES EUCLIDIENS ET HERMITIENS.	240
-------------------------------------	-----

1. Produit scalaire - 2. Orthogonalité - 3. La bijection $E \simeq E^*$ - 4. Endomorphismes orthogonaux et unitaires - 5. Diagonalisation de certains endomorphismes - 6. Angles non orientés - 7. Exercices.	
2 ESPACES EUCLIDIENS ET AFFINES EUCLIDIENS.	266
1. Compléments - 2. Espaces affines euclidiens - 3. Projections et symétries orthogonales affines - 4. Isométries affines - 5. Simili- tudes linéaires et affines - 6. Exercices.	
3 LE GROUPE ORTHOGONAL DU PLAN, ANGLES ORIENTES	301
1. Le groupe $O(2)$ - 2. Angles orientés de vecteurs - 3. Mesure des angles orientés - 4. Angles orientés de droites - 5. Arcs capables, comparaison des différentes notions d'angles - 6. Exercices.	

THEME 5 LE GROUPE ORTHOGONAL

1 GENERATEURS DES GROUPES $O(E)$ ET $O^+(E)$	330
1. Premiers résultats - 2. Décomposition en produit de symétries dans $O(E)$ - 3. Décomposition en produit de retournements dans $O^+(E)$.	
2 APPLICATIONS AUX ISOMETRIES AFFINES	337
1. Décomposition canonique des isométries - 2. Générateurs de $Is(X)$ et $Is^+(X)$ - 3. Exemples, exercices.	
3 TOPOLOGIE DU GROUPE ORTHOGONAL	345
1. Topologie sur $\mathcal{L}(E)$ - 2. Topologie des groupes $O(E)$ et $O^+(E)$. - 3. Composantes connexes de $O(E)$ - 4. Exercices.	
4 SIMPLICITE DU GROUPE ORTHOGONAL.	351
1. Notion de groupe simple - 2. Simplicité de $O^+(E)$ pour $\dim E \neq 4$.	
5 QUATERNIONS, APPLICATIONS A $O^+(3)$ ET $O^+(4)$	354
1. Le corps des quaternions \mathbb{H} - 2. Automorphismes de \mathbb{H} et $O^+(3)$ - 3. Utilisation de \mathbb{H} pour l'étude de $O^+(4)$ - 4. Exercices.	
6 COMPLEMENTS	367
1. Complexification, applications - 2. Le paradoxe de Hausdorff-Ba- nach-Tarski - 3. Sous-groupe finis de $O(2)$ et $O(3)$.	
BIBLIOGRAPHIE.	379
INDEX DES NOTATIONS.	380
INDEX TERMINOLOGIQUE	382

CLAUDE TISSERON

Géométries affine, projective et euclidienne

Ce livre est un outil de travail. Il est destiné aux étudiants de licence et de maîtrise préparant le CAPES ou l'agrégation. Son contenu recouvre une grande partie des connaissances de géométrie requises pour ces concours. Ce livre s'adresse aussi aux professeurs de lycée ou d'enseignement supérieur s'intéressant à la géométrie.

Les centres d'intérêt de l'ouvrage sont les géométries affine, projective, et euclidienne – ou métrique –. Ces géométries sont envisagées sous différents aspects faisant intervenir l'algèbre linéaire, la topologie et la théorie des groupes, montant ainsi l'interaction de ces différentes disciplines. Une bonne place est faite à l'étude des figures, pour leur aspect esthétique, leur contenu intuitif et leur importance historique. En plus des propriétés classiques des géométries considérées, l'ouvrage en présente d'autres, moins usuelles à ce niveau, comme par exemple le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski.

Pour rendre son utilisation plus agréable, le texte est accompagné de nombreux tableaux et figures, les commentaires sont abondants, parfois sous forme de considérations heuristiques ou d'aperçus historiques. Les démonstrations sont rédigées en détail, de même que les énoncés de nombreux exercices destinés à l'étudiant moyen. Il y a également des exercices à thèmes, d'énoncés plus ouverts et/ou plus difficiles. Les notions élémentaires, souvent banales, ne sont pas négligées puisqu'elles peuvent permettre à un enseignant soucieux de se recycler de rencontrer un terrain d'accroche solide.

ISBN 2 7056 1408 7

120 F



9 782705 614089