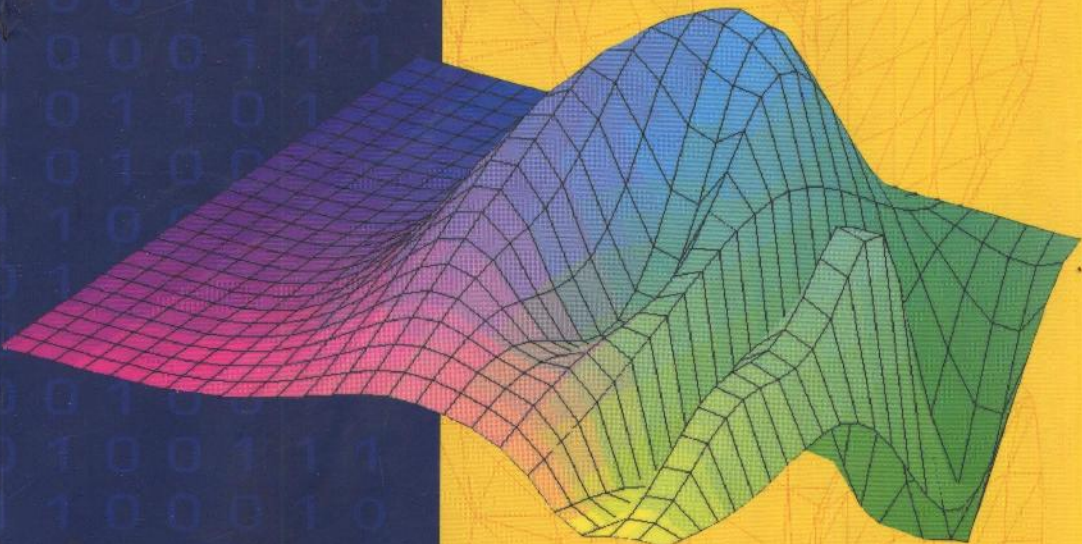
Franck Jedrzejewski

Introduction aux méthodes numériques

Deuxième édition



Springer

Franck Jedrzejewski

Introduction aux méthodes numériques

Deuxième édition

Springer

Table des matières

Introduction **13**

1 Problèmes numériques **17**
1.1 Erreurs et précision 17
1.2 Convergence et stabilité 19
1.3 Accélération de la convergence 21
1.4 Complexité 21
1.5 Optimisation 23
1.6 Problèmes bien posés, problèmes raides 25
1.7 Conditionnement 27
1.8 Exercices 32

2 Approximation et interpolation **35**
2.1 Interpolation de Lagrange 35
2.2 Interpolation d'Hermite 38
2.3 Interpolation de Tchebychev 39
2.4 Différences divisées 41
2.5 Algorithme de Neville-Aitken 48
2.6 Meilleure approximation 50
2.7 Approximation uniforme 52
2.8 Polynômes orthogonaux 54
2.9 Approximation quadratique 59
2.10 Polynômes de Bernstein 61
2.11 Fonctions splines 63

2.12 Approximants de Padé . . . 66
2.13 Exercices . . . 67

3 Résolution d'équations 69
3.1 Équations algébriques . . . 69
3.2 Théorèmes de points fixes . . . 71
3.3 Localisation des racines . . . 72
3.4 Approximations successives . . . 74
3.5 Méthode de la sécante . . . 74
3.6 Méthode de Müller . . . 75
3.7 Méthode de la bissection . . . 75
3.8 Méthode de Newton-Raphson . . . 75
3.9 Méthode de Steffensen . . . 77
3.10 Méthode de Brent . . . 77
3.11 Méthode de Frobenius . . . 78
3.12 Méthode de Bairstow . . . 78
3.13 Méthode d'Aitken . . . 79
3.14 Exercices . . . 81

4 Intégration numérique 83
4.1 Principes généraux . . . 83
4.2 Méthode des rectangles . . . 85
4.3 Méthode des trapèzes . . . 87
4.4 Méthode de Simpson . . . 87
4.5 Méthode de Newton-Côtes . . . 88
4.6 Méthode de Poncelet . . . 89
4.7 Méthode de Romberg . . . 90
4.8 Méthodes de Gauss . . . 90
4.9 Intégration de Gauss-Legendre . . . 92
4.10 Intégration de Gauss-Laguerre . . . 93
4.11 Intégration de Gauss-Tchebychev . . . 94
4.12 Intégration de Gauss-Hermite . . . 94
4.13 Exercices . . . 95

5 Systèmes linéaires 99
5.1 Généralités sur les matrices . . . 99
5.2 Méthodes directes . . . 104
5.2.1 Méthode de remontée . . . 104
5.2.2 Élimination de Gauss . . . 104
5.2.3 Méthode de Gauss-Jordan . . . 106
5.2.4 Problème des pivots . . . 107
5.2.5 Méthode de Crout. Factorisation LU . . . 109
5.2.6 Méthode de Cholesky . . . 111
5.2.7 Méthode de Householder. Factorisation QR . . . 111
5.3 Méthodes itératives . . . 113

5.3.1 Méthode de Jacobi . . . 114
5.3.2 Méthode de Gauss-Seidel . . . 115
5.3.3 Méthodes de relaxation . . . 117
5.3.4 Méthode d'Uzawa . . . 118
5.4 Méthodes projectives . . . 118
5.4.1 Méthode de la plus profonde descente . . . 119
5.4.2 Méthode du gradient conjugué . . . 120
5.4.3 Méthode du gradient conjugué préconditionné 120
5.4.4 Méthode du gradient conjugué pour les moindres carrés . . . 121
5.4.5 Méthode du gradient biconjugué . . . 121
5.4.6 Méthode d'Arnoldi . . . 122
5.4.7 Méthode GMRES . . . 124
5.5 Exercices . . . 125

6 Valeurs et vecteurs propres 129
6.1 Méthode des puissances . . . 129
6.2 Déflation de Wielandt . . . 131
6.3 Méthode de Jacobi . . . 131
6.4 Méthode de Givens-Householder . . . 133
6.5 Méthode de Rutishauser . . . 134
6.6 Méthode de Francis . . . 135
6.7 Méthode de Lanczòs . . . 136
6.8 Calcul du polynôme caractéristique . . . 137
6.8.1 Méthode de Krylov . . . 137
6.8.2 Méthode de Leverrier . . . 137
6.8.3 Méthode de Faddeev . . . 138
6.9 Exercices . . . 139

7 Équations et systèmes d'équations différentielles 141
7.1 Existence et unicité des solutions . . . 141
7.2 Champs de vecteurs . . . 142
7.3 Inversion locale . . . 144
7.4 Équations différentielles linéaires . . . 145
7.5 Points critiques . . . 147
7.6 Ensembles limites . . . 148
7.7 Stabilité de Lyapunov . . . 149
7.8 Solutions périodiques. Théorie de Floquet . . . 151
7.9 Intégrales et fonctions elliptiques . . . 152
7.10 Transcendantes de Painlevé . . . 154
7.11 Hyperbolicité. Variété centrale . . . 155
7.12 Classification des flots bidimensionnels . . . 158
7.13 Théorème de Poincaré-Bendixson . . . 158
7.14 Stabilité structurelle. Théorème de Peixoto . . . 160
7.15 Bifurcations . . . 161

7.16 Système de Lorenz 162
7.17 Méthodes d'Euler 163
7.18 Méthodes de Runge-Kutta 164
7.19 Méthode de Newmark 167
7.20 Méthodes d'Adams 168
7.21 Méthodes de Rosenbrock 170
7.22 Méthodes de prédiction-correction 172
7.23 Exercices 172

8 Équations aux dérivées partielles **175**
8.1 Problèmes aux limites 175
8.2 Espaces de Lebesgue 176
8.3 Distributions 177
8.4 Opérateurs pseudo-différentiels 179
8.5 Espaces de Sobolev 180
8.6 Variété des caractéristiques 182
8.7 Classification des équations 183
8.8 Problèmes équivalents 184
8.9 Schémas de discrétisation 188
8.10 Convergence et stabilité 190
8.11 Exercices 193

9 Équations elliptiques **195**
9.1 Fonctions harmoniques. Principe du maximum 196
9.2 L'opérateur de Laplace 196
9.3 Équations elliptiques linéaires 197
9.4 Équations elliptiques non linéaires 200
9.5 Méthode de Richardson-Liebmann 200
9.6 Méthodes de relaxation 201
9.7 Méthode par transformée de Fourier rapide 201
9.8 Exercices 202

10 Équations paraboliques **203**
10.1 Équation de la chaleur 203
10.2 Équation de la diffusion 206
10.3 Équation parabolique non linéaire 206
10.4 Méthode du theta-schéma 207
10.5 Méthode de Crank-Nicholson 208
10.6 Méthode alternative de Peaceman-Rachford-Douglas 209
10.7 Exercices 209

11 Équations hyperboliques **211**
11.1 Résultats fondamentaux 211
11.2 Équation du transport 216
11.2.1 Schéma de Lax 216

11.2.2 Schéma décentré 216
11.2.3 Schéma saute-mouton 217
11.2.4 Schéma de Lax-Wendroff 217
11.3 Équation des ondes 218
11.3.1 Méthode du theta-schéma 219
11.3.2 Schéma de Lax 221
11.3.3 Schéma saute-mouton 221
11.3.4 Schéma de Lax-Wendroff 222
11.4 Équation de Burgers 222
11.4.1 Schéma de Lax-Friedrichs 222
11.4.2 Schéma saute-mouton 224
11.4.3 Schéma de Lax-Wendroff 224
11.4.4 Schéma d'Engquist-Osher 225
11.4.5 Schéma de Godunov 225
11.4.6 Schémas de Lerat-Peyret 226
11.5 Exercices 226

12 Méthode des éléments finis **229**
12.1 Principe de la méthode 229
12.2 Formulation variationnelle 230
12.3 Maillage et fonctions de forme 231
12.4 Matrices de masse et de rigidité élémentaires 232
12.5 Éléments finis lagrangiens d'ordre 1 232
12.6 Éléments finis lagrangiens d'ordre 2 235
12.7 Éléments finis lagrangiens d'ordre 3 236
12.8 Éléments finis hermitiens 237
12.9 Méthodes des résidus pondérés 239
12.10 Méthode de Rayleigh-Ritz 243
12.11 Exercices 244

13 Équations de physique **247**
13.1 Équation de Navier-Stokes 247
13.2 Équation de Schrödinger 250
13.3 Équation de Korteweg de Vries 252
13.4 Équation de sine-Gordon 255
13.5 Équation de Klein-Gordon 256
13.6 Équation de Benjamin-Bona-Mahony 257
13.7 Exercices 257

A Polynômes orthogonaux **259**
A.1 Polynômes de Legendre 259
A.2 Polynômes de Laguerre 260
A.3 Polynômes de Tchebychev 262
A.4 Polynômes d'Hermite 264
A.5 Polynômes de Gegenbauer 265

A.6 Polynômes de Jacobi 266

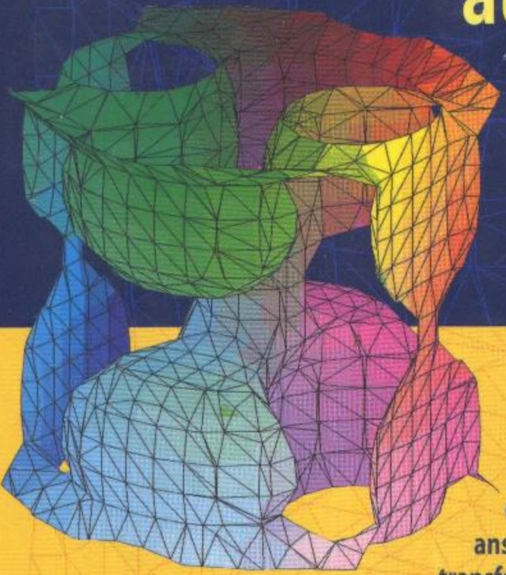
Bibliographie **269**

Index **287**

Introduction aux méthodes numériques

Deuxième édition

Franck Jedrzejewski



Au cours de l'histoire, les méthodes de calcul ont été l'expression de pratiques sans cesse renouvelées. Le développement de l'informatique a largement contribué à une rapide progression de l'ensemble des techniques numériques. En moins de cinquante ans, le paysage algorithmique a été complètement transformé. Aujourd'hui, la plupart des logiciels que nous employons font appel à des méthodes de plus en plus efficaces. Dans les simulations, comme dans les modélisations, l'analyse numérique occupe une place centrale.

Composants essentiels de la vie scientifique, les méthodes et algorithmes qui sont présentés ici, illustrés par de nombreux exemples, sont mis à la portée de tous. De l'approximation polynomiale à la résolution d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de différences, de volumes et d'éléments finis, ce livre offre un large panorama des méthodes numériques actuelles. Il s'appuie sur une expérience d'une dizaine d'années d'enseignement et s'adresse à un public très varié : étudiants en sciences, élèves d'écoles d'ingénieur ou de classes préparatoires qui souhaiteraient acquérir rapidement les bases des méthodes numériques.

Cette seconde édition offre des compléments d'analyse matricielle et un nouveau chapitre sur les équations de la physique mathématique, qui sont au cœur des préoccupations d'aujourd'hui.

ISBN : 2-287-25203-7

9 782287 252037

› springer.com