

1

MÉTHODES ET PRATIQUES DE L'INGÉNIEUR
Collection dirigée par Pierre BORNE

AUTOMATIQUE

**COMMANDE
et
OPTIMISATION
des
PROCESSUS**

**P. BORNE
G. DAUPHIN-TANGUY
J.-P. RICHARD
F. ROTELLA
I. ZAMBETTAKIS**

ÉDITIONS TECHNIP

1 MÉTHODES ET PRATIQUES DE L'INGÉNIEUR
Collection dirigée par Pierre BORNE
Professeur, Directeur Scientifique de l'IDN (Institut Industriel du Nord, Lille)

AUTOMATIQUE

**COMMANDE
et
OPTIMISATION
des
PROCESSUS**



21969 $\frac{1}{2}$

**Pierre BORNE
Geneviève DAUPHIN-TANGUY
Jean-Pierre RICHARD
Frédéric ROTELLA
Irène ZAMBETTAKIS**

Professeurs à l'IDN, Lille

1990



ÉDITIONS TECHNIP 27 RUE GINOUX 75737 PARIS CEDEX 15

Table des matières

Avant-propos	15
1 INTRODUCTION	19
1.1 Processus continus	19
1.1.1 Définition	19
1.1.2 Processus continu linéaire	20
1.2 Processus discrets	21
1.2.1 Définition	21
1.2.2 Processus discret linéaire	21
1.3 Commande d'un processus	22
1.4 Présentation du volume	22
2 COMMANDE NON OPTIMALE	25
2.1 Placement de pôles	25
2.1.1 Système à une seule entrée	26
2.1.1.1 Description du système	26
2.1.1.2 Détermination du gain de bouclage	27
2.1.1.3 Calcul du changement de base	28
2.1.1.4 Exemple de mise en œuvre	29
2.1.2 Système à plusieurs entrées	30
2.1.2.1 Position du problème	30
2.1.2.2 Cas continu	30
A. Détermination du gain de bouclage	30
B. Exemple	32
2.1.2.3 Cas discret	34
A. Méthode générale	34
B. Réponse pile	35
2.1.3 Remarques sur le placement de pôles par réaction d'état	36
2.2 Découplage entrée - sortie	37
2.2.1 Découplage utilisant un régulateur	37
2.2.2 Découplage par retour d'état	39
2.2.2.1 Résolution	40
2.2.2.2 Exemples	41
A. Exemple 1	41
B. Exemple 2	42

2.2.2.3	Remarques	42
2.2.2.4	Découplage dans le cas non linéaire	43
2.3	Commande à modèle interne	44
2.3.1	Présentation du cas discret	44
2.3.2	Stabilité	45
2.3.3	Poursuite et régulation	47
2.3.3.1	Le contrôleur parfait	47
2.3.3.2	Mise en œuvre pratique	47
2.3.4	Interprétation et spécification du filtre de régulation $F(q)$	49
2.3.5	Equivalence entre la CMI et la commande par réseau correcteur	49
	A. Cas discret	49
	B. Cas continu : prédicteur de Smith	50
2.3.6	Procédure de choix d'un correcteur à modèle interne dans le cas monovarié discret	51
2.3.6.1	Principe de la méthode	51
2.3.7	Placement de pôles, cas discret	53
2.3.7.1	Placement de pôles avec placement de zéros	53
2.3.7.2	Placement de pôles sans placement de zéros	55
2.4	Systèmes de commande adaptatifs et autorégulables	56
2.4.1	Principes de base de la commande adaptative	56
2.4.2	Recherche de la commande adaptative	58
2.4.2.1	Commande adaptative indirecte	58
2.4.2.2	Commande adaptative directe	59
	A. Présentation	59
	B. Commande par placement de pôles	59
	a. Principe	59
	b. Algorithme du mécanisme d'adaptation	61
	c. Mise en œuvre	61
	C. Analyse du mécanisme d'adaptation	62
	a. $\lambda_{1k} = \lambda_{2k} = 1$	62
	b. $\lambda_{1k} = \lambda < 1, \lambda_{2k} = 1$	63
2.4.3	Adaptation en boucle ouverte	64
2.4.4	Algorithmes d'adaptation paramétrique	64
2.4.4.1	Formulation du problème d'adaptation du modèle	65
2.4.4.2	Algorithme des moindres carrés récursif	66
2.4.5	Remarques générales	68
3	COMMANDE OPTIMALE	69
3.1	Principes et méthodes utilisés en commande optimale	69
3.1.1	Introduction	69
3.1.2	Position du problème	70
3.2	Calcul des variations	71
3.2.1	Variation d'une fonctionnelle	71

3.2.2	Minimisation sans contraintes	73
3.2.2.1	Conditions au premier ordre	73
	A. Condition d'Euler	73
	a. Intégrales premières de l'équation d'Euler	74
	b. Existence de discontinuités, conditions de Weierstrass-Erdmann	74
	B. Equations canoniques de Hamilton	75
	a. Equations de Hamilton	75
	b. Equation de Hamilton-Jacobi	75
	C. Conditions de transversalité	76
	a. Conditions initiales	76
	b. Conditions finales	76
	D. Extension de la condition d'Euler	76
3.2.2.2	Conditions au second ordre	77
	A. Condition de Weierstrass	77
	B. Condition de Legendre	78
3.2.3	Minimisation en présence de contraintes	78
3.2.3.1	Contraintes égalités	78
	A. Problème de Bolza	78
	B. Contraintes intégrales	78
	C. Contraintes instantanées	79
	D. Résolution	80
3.2.3.2	Contraintes inégalités	81
3.3	Détermination de la commande optimale d'un processus continu	81
3.3.1	Conditions d'optimalité	82
3.3.1.1	Conditions d'Euler	82
3.3.1.2	Conditions de transversalité	82
3.3.1.3	Condition de Weierstrass	83
3.3.2	Equations canoniques et principe du maximum	83
3.3.2.1	Equations canoniques de Hamilton	83
3.3.2.2	Expression des conditions de transversalité	84
3.3.2.3	Equation de Hamilton-Jacobi	84
3.3.3	Exemples de mise en œuvre	85
3.3.3.1	Commande en temps minimum	85
	A. Exemple 1	85
	B. Exemple 2	88
	C. Exemple 3	90
	D. Exemple 4	91
3.3.3.2	Autres types de critères	93
	A. Exemple 5 : critère énergétique	93
	B. Exemple 6 : critère consommation	95
	a. $a > 0$	96
	b. $a < 0$	96
3.3.4	Systèmes linéaires à critère quadratique	97

3.3.4.1	Système non stationnaire	97
3.3.4.2	Problème de régulation : $e \equiv 0$	98
	A. Détermination d'un bouclage optimal	98
	B. Calcul direct du gain $K(t)$	99
	C. Remarques	100
	D. Cas stationnaire, horizon infini	100
	E. Critère à coût croisé	101
3.3.4.3	Problème de poursuite : $e(t) \neq 0$	102
	A. Recherche d'une structure bouclée	102
	B. Détermination de $k(t)$	103
	C. Cas stationnaire, horizon infini	103
3.3.4.4	Critère quadratique (approche simplifiée)	105
	A. Commande à horizon fuyant	105
	B. Critère non stationnaire	106
3.3.5	Systèmes continus linéaires stochastiques	107
3.3.5.1	Fonctionnement en régulateur	107
3.3.5.2	Equations d'optimalité	108
3.4	Commande optimale des systèmes discrets	109
3.4.1	Position du problème	109
3.4.2	Minimisation en présence de contraintes	110
	3.4.2.1 Formulation	110
	3.4.2.2 Conditions au premier ordre	110
	3.4.2.3 Conditions de transversalité	111
	3.4.2.4 Conditions au second ordre	111
	3.4.2.5 Solution du problème	111
3.4.3	Principe du maximum discret	111
	3.4.3.1 Première formulation	111
	3.4.3.2 Deuxième formulation	112
	3.4.3.3 Exemple	112
3.4.4	Système linéaire et critère quadratique	113
	3.4.4.1 Cas déterministe	113
	A. Position du problème	113
	B. Recherche d'une structure bouclée	114
	3.4.4.2 Cas stochastique	115
	A. Position du problème	115
	B. Résolution de l'équation d'optimalité	116
3.5	Recherche de structures optimales dans le domaine fréquentiel	116
3.5.1	Principe	116
3.5.2	Cas déterministe	118
	3.5.2.1 Notations	118
	A. Rappels sur la transformée de Laplace	118
	B. Rappels sur la transformée en z	119
	C. Notations unifiées	120
	3.5.2.2 Résolution dans le cas monovarié	121

	A. Cas continu	122
	B. Cas discret	123
	C. Exemple de mise en œuvre	124
3.5.2.3	Résolution dans le cas multivarié	125
3.5.3	Cas stochastique	127
	A. Notations et formulation	127
	B. Cas monovarié	128
	C. Cas multivarié	129
3.6	Programmation dynamique	131
3.6.1	Présentation de la méthode	131
3.6.2	Exemple	131
3.6.3	Détermination de la commande optimale d'un processus discret	135
	3.6.3.1 Position du problème	135
	3.6.3.2 Equation récurrente d'optimalité	136
	3.6.3.3 Remarques	137
	A. Structure bouclée	137
	B. Cas stationnaire, horizon infini	137
	C. Horizon non fixé	137
	D. Horizon aléatoire	137
	E. Existence de contraintes de type somme	138
	F. Horizon fixé, notation inversée	138
	G. Loi d'évolution aléatoire	139
3.6.4	Système linéaire sans contraintes, critère quadratique	139
	3.6.4.1 Position du problème	139
	3.6.4.2 Résolution	140
	A. Etat final libre	140
	B. Etat final imposé	141
	a. Position du problème	141
	b. Initialisation	141
	c. Résolution	142
	3.6.4.3 Commande à appliquer en cas de manque	142
	A. Utilisation de la commande nulle	143
	B. Utilisation de la commande antérieure	144
3.6.5	Détermination de la commande optimale d'un processus continu	145
	3.6.5.1 Equations d'optimalité	146
	3.6.5.2 Application à la commande des systèmes linéaires avec critère quadratique	147
3.7	Commande optimale des systèmes interconnectés, méthodes de coordination	148
	3.7.1 Présentation des méthodes de coordination	148
	3.7.2 Coordination au niveau du modèle	149
	3.7.3 Coordination au niveau du critère	151
	3.7.4 Coordination mixte par prédiction interactive	153

3.8	Commande quasi-optimale des systèmes à deux dynamiques	154
3.8.1	Système singulièrement perturbé	154
3.8.1.1	Principe de la modélisation	154
3.8.1.2	Découplage des dynamiques	155
3.8.1.3	Principe du maximum et perturbations singulières	157
3.8.2	Cas linéaire stationnaire	158
3.8.2.1	Découplage	158
3.8.2.2	Commande quasi-optimale	158
A.	Première approche	159
a.	Découplage du système étendu optimal	159
b.	Simplification de l'équation de Riccati	160
B.	Découplage du système initial	161
a.	Problème rapide	161
b.	Problème lent	162
C.	Calcul de l'indice de performance	162
3.8.2.3	Exemple de mise en œuvre	163
A.	Commande optimale	163
B.	Première méthode	164
C.	Deuxième méthode	164
D.	Troisième méthode	165
4	OBSERVATION	167
4.1	Systèmes continus	168
4.1.1	Principe de l'observation	168
4.1.2	Détermination simplifiée d'un observateur	169
4.1.3	Détermination directe du gain de l'observateur	170
4.1.3.1	Système mono-sortie	170
4.1.3.2	Cas général	171
A.	Utilisation du cas mono-sortie	171
B.	Utilisation de la forme observable	172
4.1.3.3	Exemple 1	173
A.	Méthode de Bass et Gura	173
B.	Méthode de Luenberger	175
4.1.4	Principe de séparation	176
4.2	Systèmes discrets	178
4.2.1	Observateurs prédictifs ou correcteurs	178
4.2.1.1	Observateur - prédictif	178
4.2.1.2	Observateur - correcteur	179
A.	Anticipation	179
B.	Prédiction	179
4.2.1.3	Remarques sur les observateurs de systèmes discrets	180
4.2.2	Calcul direct du gain d'un observateur	180

4.2.3	Choix du gain de l'observateur-prédictif	181
4.3	Simplification des observateurs	183
4.3.1	Observateur d'ordre réduit	183
4.3.1.1	Construction	183
4.3.1.2	Exemple	185
4.3.2	Systèmes singulièrement perturbés	187
4.3.3	Observation d'une fonction linéaire de l'état	189
4.3.3.1	Réduction de l'ordre de l'observateur	189
4.3.3.2	Structure générale	190
4.3.3.3	Détermination de l'observateur	191
A.	Cas d'une forme linéaire ($l = 1$)	191
B.	Exemple d'utilisation	193
C.	Cas général $l > 1$	194
5	FILTRAGE	197
5.1	Filter de Wiener	198
5.1.1	Cas des signaux continus	198
5.1.1.1	Equation de Wiener-Hopf	199
5.1.1.2	Résolution	200
A.	Préliminaires	200
a.	Remarque	200
b.	Factorisation	200
c.	Décomposition	200
B.	Résolution de l'équation de Wiener-Hopf	201
C.	Exemple	201
5.1.2	Cas des signaux discrets	202
5.1.2.1	Equation de Wiener-Hopf	202
5.1.2.2	Notations	203
A.	Factorisation	203
B.	Décomposition	204
5.1.2.3	Résolution	204
5.2	Le filtre de Kalman	205
5.2.1	Le filtre de Kalman discret	205
5.2.1.1	Equations du filtre	206
A.	Formes particulières du filtre	208
B.	Résultats supplémentaires	208
a.	Autres expressions de $P_{k/k}$	209
b.	Inverse de $P_{k/k}$	209
c.	Gain optimal	209
d.	Calcul de $U_{k/k-1} = \text{cov}(\tilde{y}_{k/k-1})$	210
e.	Calcul de $U_{k/k} = \text{cov}(\tilde{y}_{k/k})$	210
f.	Calcul de $\tilde{U}_{k/k-1} = \text{cov}(\tilde{y}_{k/k-1} - \tilde{y}_{k/k})$	210
C.	La forme de Joseph	211
5.2.1.2	Cas où les bruits sont corrélés	212
5.2.1.3	Le filtre Information	214

A.	Mise-à-jour des matrices Information	214
B.	Mise-à-jour des estimations	215
C.	Autres formes de $P_{k+1/k}^{-1}$	215
a.	La forme de Joseph	215
b.	L'équation de Riccati	215
D.	Propriétés et utilisation du filtre Information	216
5.2.2	Le filtre de Kalman continu	216
5.2.2.1	Relations entre les cas continus et discrets	217
5.2.2.2	Détermination du gain optimal	218
5.2.2.3	Filtre de Kalman-Bucy	219
5.2.3	Commentaires sur le filtre de Kalman	220
5.2.3.1	Cas où certaines sorties sont non bruitées	220
5.2.3.2	Filtre stationnaire	223
5.2.3.3	Implantation numérique d'un filtre de Kalman	224
A.	Traitement séquentiel des observations	224
B.	Amélioration des performances	226
a.	Algorithmes de factorisation	226
b.	Algorithmes de filtrage rapide	228
5.3	Applications du filtrage	229
5.3.1	Commande optimale stochastique	229
5.3.2	Lissage	230
5.3.2.1	Principe du lissage	230
5.3.2.2	Equations du filtre lisseur	231
A.	Filtres "Aller" et "Retour"	232
B.	Evolution de la covariance d'erreur de lissage	232
C.	Evolution de l'état lissé	233
5.3.3	Identification	233
5.3.3.1	Estimation de paramètres	234
5.3.3.2	Forme filtre	235
6	PROBLÈMES ET EXERCICES RÉSOLUS	237
6.1	Alunissage	237
6.1.1	Présentation du problème	237
6.1.2	Mise en équation	237
6.1.3	Résolution	238
A.	Expression du Hamiltonien	238
B.	Maximisation du Hamiltonien	238
C.	Etudes des trajectoires	239
6.2	Problème du brachistochrone	241
6.2.1	Formulation du problème	241
6.2.2	Résolution	242
6.3	Mobile en déplacement dans un milieu résistant	243
6.3.1	Présentation du problème	243
6.3.2	Formulation	243
6.3.3	Recherche de la solution optimale	244

6.4	Commande d'un moteur de laminoir	246
6.4.1	Formulation du problème	246
6.4.2	Recherche de la solution optimale	247
6.4.3	Recherche directe de la solution optimale à t_f non fixé	248
6.5	Détermination de la commande optimale d'un système linéaire	249
6.5.1	Présentation du problème	249
6.5.2	Recherche de l'initialisation	250
6.5.3	Application numérique	252
ANNEXES		255
A	FORME OBSERVABLE DE LUENBERGER	257
B	CALCUL DE DÉRIVÉES	261
B.1	Dérivées	261
B.1.1	Dérivée partielle première	261
B.1.1.1	Cas général, m quelconque	261
B.1.1.2	Cas particulier, $m = 1$	261
B.1.2	Dérivée partielle seconde d'une fonction scalaire	262
B.2	Opération sur les dérivées	262
B.2.1	Dérivée de somme et produit de fonctions	262
B.2.2	Dérivée d'une fonction de fonction	262
B.3	Utilisation	262
B.3.1	Exemples	262
B.3.2	Règle pratique	263
C	ESTIMATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE	265
C.1	Estimation au sens des moindres carrés	265
C.2	Estimateur au sens des moindres carrés	267
C.2.1	Estimation linéaire	268
C.2.2	Estimateur optimal de variables gaussiennes	269
D	DÉMONSTRATION DES RELATIONS DU FILTRE DE KALMAN	273
D.1	Estimation récursive	273
D.2	Démonstration des équations du filtre de Kalman	275
D.3	Décomposition du filtre	276
E	DUALITÉ ENTRE FILTRAGE ET COMMANDE OPTIMALE	279
E.1	Problème (COQ)	279
E.1.1	Cas des systèmes discrets	279
E.1.2	Cas des systèmes continus	280
E.1.3	Remarque	280
E.2	Problème (F)	280

E.2.1	Cas de systèmes discrets	280
E.2.2	Cas des systèmes continus	281
E.2.3	Remarque	282
E.3	Dualité des problèmes (COQ) et (F)	282
F	FACTORISATION "RACINE CARRÉE"	283
F.1	Lemme de factorisation matricielle	283
F.2	Décomposition de Cholewsky	284
G	RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DE RICCATI	285
G.1	Préliminaires	285
G.1.1	Quelques définitions	285
G.1.2	Recherche de valeurs propres	287
G.1.2.1	Factorisation QR	287
G.1.2.2	Recherche des valeurs propres	288
G.1.3	Fonction signe et produit étoile	288
G.1.3.1	Fonction signe	288
G.1.3.2	Produit étoile	289
G.2	Equation de Riccati continue	290
G.2.1	Méthode itérative par quasi-linéarisation	290
G.2.2	Méthodes hamiltoniennes	291
G.2.2.1	Utilisation de la forme de Jordan	291
G.2.2.2	Utilisation de la forme de Schur réelle	291
G.2.2.3	Utilisation de la fonction signe	292
G.3	Equation de Riccati discrète	292
G.3.1	Méthodes itératives	293
G.3.1.1	Equation itérative de Riccati	293
G.3.1.2	Quasilinearisation	293
G.3.1.3	Utilisation du produit étoile	293
G.3.2	Méthodes symplectiques	294
G.3.2.1	Utilisation de la forme de Jordan	294
G.3.2.2	Utilisation de la forme de Schur réelle	295
G.3.2.3	Utilisation de la fonction signe	295
	BIBLIOGRAPHIE	297
	INDEX	301

Collection Méthodes et Pratiques de l'Ingénieur

Cette collection s'adresse aux élèves ingénieurs, aux étudiants de maîtrise et de DEA, aux enseignants ainsi qu'aux ingénieurs et techniciens supérieurs en activité, désireux de rafraîchir ou de compléter leur formation dans les sciences de l'ingénieur.

Commande et optimisation des processus

*P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard
F. Rotella, I. Zambettakis*

Cet ouvrage présente les outils mathématiques nécessaires à la compréhension et à la mise en œuvre des méthodes de commande des processus industriels et à l'optimisation de leur fonctionnement.

Les deux aspects fondamentaux, détermination de la loi de commande d'une part, et filtrage et reconstitution de données d'autre part, sont présentés de façon détaillée.

De nombreux exemples et problèmes résolus illustrent les méthodes proposées.

Le présent volume a été réalisé grâce à une collaboration pédagogique active entre les auteurs, tous les membres de l'équipe d'enseignants d'automatique de l'IDN (Institut Industriel du Nord, Lille), sur une base de contenu établie dans le cadre d'un programme d'échanges ERASMUS associant les enseignants d'établissements partenaires de six pays.



9 782710 805991

ISBN 2-7108-0599-5